Durée : 4 heures

Baccalauréat C Aix-Marseille juin 1972

EXERCICE 1 **5 points**

Étudier, suivant la valeur de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 6 du nombre 5^n.
Pour quelles valeurs de n le nombre $A = 5^n + 5n + 1$ est-il divisible par 6 ?

EXERCICE 2 **5 points**

L'unité de temps est la seconde, l'unité de longueur est le centimètre.
Un point M se déplace dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de façon que, à tout instant $t > 0$, les coordonnées de son vecteur vitesse, $\vec{V}$, soit

$$x' = \frac{3}{2}\sqrt{t} \quad \text{et} \quad y' = \frac{9}{2}\frac{\ln t}{t}.$$

À l'instant $t = 1$, le point M est en A(1 ; 0). Calculer les coordonnées, x et y, de M, en fonction de t. Former l'équation cartésienne de sa trajectoire et construire cette trajectoire.

PROBLÈME **10 points**

À chaque couple de réels $(\lambda ; \mu)$ on associe l'application f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$f(x) = (\lambda \cos x + \mu \sin x)\text{e}^x.$$

On désigne ainsi par $(\mathcal{F})$ l'ensemble des fonctions numériques ainsi définies.

1. Soit $(\mathcal{C})$ l'ensemble des applications continues, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on sait que $(\mathcal{C})$, muni des deux opérations, addition des fonctions et multiplication de fonctions par les réels, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   a. Montrer que $(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{C})$.
   b. Démontrer que f est la fonction nulle si, et seulement si, $\lambda = \mu = 0$.
   Démontrer que les deux fonctions E_1 et E_2 de $(\mathcal{F})$ définies par $E_1(x) = \text{e}^x \cos x$ et $E_2(x) = \text{e}^x \sin x$ constituent une base de l'espace vectoriel $(\mathcal{F})$.
2. On sait que toutes les fonctions de $(\mathcal{F})$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$;
   a. Soit f une fonction de $(\mathcal{F})$; démontrer que sa fonction dérivée f' appartient aussi à $(\mathcal{F})$.
   Soit D l'application, de $(\mathcal{F})$ dans lui-même, qui, à chaque élément, f, de $(\mathcal{F})$, fait correspondre sa fonction dérivée.
   Démontrer que D est une application linéaire. Quelle est la matrice de D dans la base $(E_1,\ E_2)$?
   b. Démontrer que D admet une application réciproque. En déduire que tout élément f de $(\mathcal{F})$ a une de ses primitives qui appartient à $(\mathcal{F})$.
   Application : Calculer

$$\int_0^{\pi} (\lambda \cos x + \mu \sin x)\text{e}^x\,\text{d}x.$$

3. Expliquer sans calcul, pourquoi, étant donné f, élément de $(\mathscr{F})$, sa fonction dérivée première f' et sa fonction dérivée seconde f'', il existe des nombres réels α, β et γ non tous nuls, tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = 0.$$

Démontrer que l'on peut choisir α, β et γ, non tous nuls et indépendants de f de telle sorte que

$$\forall f \in (\mathscr{F}),\ \forall x \in \mathbb{R} : \quad \alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = 0.$$

4. On considère un plan affine euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. À chaque fonction g, $\quad g : x \longmapsto (a\cos x + b\sin x)\mathrm{e}^x$ de $(\mathscr{F})$ on fait correspondre le point de (P) de coordonnées $(a\ ;\ b)$. Ainsi, si $M(\lambda\ ;\ \mu)$ est le point de (P) correspondant à la fonction $f : x \longmapsto (\lambda\cos x + \mu\sin x)\mathrm{e}^x$ de $(\mathscr{F})$, on note M' le point de (P) associé à la fonction dérivée f' de f.

Caractériser la transformation T de (P) qui, à tout point M, associe le point M'.