Durée : 4 heures

Baccalauréat C Montréal et New York juin 1972

EXERCICE 1

Soit (E) un espace vectoriel réel de dimension trois dont $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ est une base. On considère l'endomorphisme f de (E) défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & -\overrightarrow{\imath}+2\overrightarrow{k} \\ f\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & \overrightarrow{\jmath}+2\overrightarrow{k}, \\ f\left(\overrightarrow{k}\right) & = & 2\overrightarrow{\imath}+2\overrightarrow{\jmath}. \end{array}\right.$$

Démontrer que le noyau de f est une droite vectorielle (E_1) de (E). Donner une base $\left\{\overrightarrow{e_1}\right\}$ de (E_1).

Démontrer que l'image de f est un plan vectoriel (E_2) de (E). Déterminer une base $\left\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right\}$ de (E) telle que $\left\{\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right\}$ soit une base de (E_2).

EXERCICE 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Étudier les variations de f et construire sa représentation graphique.

Quelle est l'image $\mathbb{R}'$ de $\mathbb{R}$ par l'application f ?

Démontrer que l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}'$ définie par $g(x) = f(x)$ est bijective.

Soit $h = g^{-1}$ l'application réciproque. Calculer $h(x)$.

PROBLÈME

On considère un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'axes Ox et Oy.

1. **a.** On désigne par $\mathscr{H}$ l'homothétie de centre A, de coordonnées $(a~;~0)$, et de rapport $k > 0$. Soit M un point du plan, d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$. On note $M_1 = \mathscr{H}(M)$.

   Donner l'expression de z_1 affixe de M_1, en fonction de z, a et k.

   b. On désigne par R la rotation de centre O et d'angle θ. On appelle u le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

   Soit $\mathscr{T} = \mathscr{R} \circ \mathscr{H}$. On note $M' = \mathscr{T}(M)$. Soit $z' = x' + \mathrm{i}y'$ l'affixe de M'.

   Démontrer que $z' = kuz + au(1-k)$. Indiquer la nature de la transformation $\mathscr{T}$.

   Déterminer l'affixe de son point invariant, I, lorsque $\mathscr{T}$ n'est pas la transformation identique.

2. On suppose dans la suite que $u = i$ et $a = 5$.

   Calculer les coordonnées $(\alpha~;~\beta)$ du point I en fonction de k. Déterminer l'ensemble des points I lorsque k décrit l'ensemble des réels positifs.

   (On remarquera que $\alpha = k\beta = 0$.)

   Déterminer les points I dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs.

3. On suppose maintenant $u = i$, $a = 5$ et $k = 3$.
Calculer les coordonnées du point M' en fonction des coordonnées de M.
Soit P le point de coordonnées $(3\,;\,2)$. Déterminer l'ensemble des points M tels que les trois points M, M' et P soient alignés.