

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Aix-Marseille juin 1972 ∞

EXERCICE 1

5 points

Soit l'application définie dans  $\mathbb{C}$  par

$$z \mapsto z' = (i - \sqrt{3})z + 3 + \sqrt{3} + i(2\sqrt{3} + 1).$$

1. Caractériser géométriquement la transformation qui, à tout point  $M$  du plan complexe, d'affixe  $z$ , fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $z'$ .
2. Le point  $M(x; y)$  ayant pour homologue la point  $M'(x'; y')$ , exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et de  $y$ .
3. Déterminer le transformé de la droite passant par le point  $A(1 - 2\sqrt{3}; 0)$  et de vecteur directeur  $\vec{V}(\sqrt{3}; 1)$ .  
Justifier le résultat obtenu.

EXERCICE 2

5 points

Soit  $f$  la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{2}.$$

1.
  - a. Faire une étude détaillée de  $f$  : l'ensemble de définition, la continuité, la dérivabilité, et le tableau de variations.
  - b. Déterminer les tangentes à  $(\mathcal{C})$  au point  $A(1; 0)$  et  $B(-1; 0)$ .
  - c. Montrer que les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  d'équations respectives  $y_1 = \frac{1}{2}x$  et  $y_2 = -\frac{1}{2}x$  sont asymptotes à  $(\mathcal{C})$ .
2.
  - a. Tracer  $(\mathcal{C})$ ; en déduire l'ensemble,  $(\Gamma)$ , des points  $M$  dont les coordonnées  $x$  et  $y$  vérifient la relation

$$4y^2 = |x^2 - 1|.$$

- b. Montrer que  $(\Gamma)$  est la réunion de deux coniques, dont on précisera la nature.

PROBLÈME

10 points

On considère la fonction numérique  $f$  d'une variable réelle définie par

$$f(x) = x \log \frac{2x-1}{x},$$

où  $\log x$  désigne le logarithme népérien de  $x$ .

On note  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un système d'axes orthonormés (l'unité sur chaque axe est 2 cm).

1.
  - a. Étudier le domaine de définition.

- b.** Calculer les limites de  $f(x)$  aux bornes des intervalles du domaine de définition. Pour étudier la limite de  $f(x)$ , lorsque  $x$  tend vers 0, par valeurs négatives, on pourra poser  $-x = u$ .
- 2.** Étudier les variations de la fonction dérivée,  $f'$ ; en déduire le signe de  $f'(x)$ .
- 3. a.** Démontrer que la droite d'équation  $y = x \log 2 - \frac{1}{2}$  est asymptote à la courbe ( $\mathcal{C}$ ).
- Pour le calcul de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \operatorname{Log} \frac{2x-1}{x} - x \operatorname{Log} 2 \right)$ , on pourra poser  $\frac{2x-1}{x} = 1 + v$ .
- b.** On considère la fonction numérique  $g$  d'une variable réelle définie par  $g(x) = \operatorname{Log} x - x + 1$ .  
Étudier les variations de  $g$ ; en déduire que

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad \operatorname{Log} x \leq x - 1.$$

Utiliser ce résultat pour démontrer que

$$\begin{aligned} x \operatorname{Log} \frac{2x-1}{x} + \frac{1}{2} &\leq 0, \quad \text{pour } x > \frac{1}{2} \\ \text{et } x \operatorname{Log} \frac{2x-1}{x} + \frac{1}{2} &\geq 0, \quad \text{pour } x < 0. \end{aligned}$$

En déduire la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

- 4.** Donner le tableau de variation et tracer la courbe ( $\mathcal{C}$ ).
- 5.** Calculer, en utilisant l'intégration par parties, une primitive de  $f(x)$ .
- 6.** Calculer, en centimètres carrés, avec la précision permise par les tables de logarithmes, l'aire de la surface comprise entre la courbe ( $\mathcal{C}$ ), l'asymptote oblique et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 3$ .