

Durée : 4 heures

œ Baccalauréat C Aix-Marseille juin 1972 œ

EXERCICE 1

5 points

Soit l'application définie dans \mathbb{C} par

$$z \mapsto z' = (i - \sqrt{3})z + 3 + \sqrt{3} + i(2\sqrt{3} + 1).$$

1. Caractériser géométriquement la transformation qui, à tout point M du plan complexe, d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' .
2. Le point $M(x; y)$ ayant pour homologue la point $M'(x'; y')$, exprimer x' et y' en fonction de x et de y .
3. Déterminer le transformé de la droite passant par le point $A(1 - 2\sqrt{3}; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{V}(\sqrt{3}; 1)$.
Justifier le résultat obtenu.

EXERCICE 2

5 points

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{2}.$$

1.
 - a. Faire une étude détaillée de f : l'ensemble de définition, la continuité, la dérivabilité, et le tableau de variations.
 - b. Déterminer les tangentes à (\mathcal{C}) au point $A(1; 0)$ et $B(-1; 0)$.
 - c. Montrer que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y_1 = \frac{1}{2}x$ et $y_2 = -\frac{1}{2}x$ sont asymptotes à (\mathcal{C}) .
2.
 - a. Tracer (\mathcal{C}) ; en déduire l'ensemble, (Γ) , des points M dont les coordonnées x et y vérifient la relation

$$4y^2 = |x^2 - 1|.$$

- b. Montrer que (Γ) est la réunion de deux coniques, dont on précisera la nature.

PROBLÈME

10 points

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle définie par

$$f(x) = x \log \frac{2x-1}{x},$$

où $\log x$ désigne le logarithme népérien de x .

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un système d'axes orthonormés (l'unité sur chaque axe est 2 cm).

1.
 - a. Étudier le domaine de définition.

- b.** Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes des intervalles du domaine de définition. Pour étudier la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers 0, par valeurs négatives, on pourra poser $-x = u$.
- 2.** Étudier les variations de la fonction dérivée, f' ; en déduire le signe de $f'(x)$.
- 3. a.** Démontrer que la droite d'équation $y = x \log 2 - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (\mathcal{C}).
- Pour le calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \operatorname{Log} \frac{2x-1}{x} - x \operatorname{Log} 2 \right)$, on pourra poser $\frac{2x-1}{x} = 1 + v$.
- b.** On considère la fonction numérique g d'une variable réelle définie par $g(x) = \operatorname{Log} x - x + 1$. Étudier les variations de g ; en déduire que

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \operatorname{Log} x \leq x - 1.$$

Utiliser ce résultat pour démontrer que

$$x \operatorname{Log} \frac{2x-1}{x} + \frac{1}{2} \leq 0, \quad \text{pour } x > \frac{1}{2}$$

et $x \operatorname{Log} \frac{2x-1}{x} + \frac{1}{2} \geq 0, \quad \text{pour } x < 0.$

En déduire la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

- 4.** Donner le tableau de variation et tracer la courbe (\mathcal{C}).
- 5.** Calculer, en utilisant l'intégration par parties, une primitive de $f(x)$.
- 6.** Calculer, en centimètres carrés, avec la précision permise par les tables de logarithmes, l'aire de la surface comprise entre la courbe (\mathcal{C}), l'asymptote oblique et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.