Durée : 4 heures

Baccalauréat C Besançon juin 1972

EXERCICE 1

Donner la nature de la conique d'équation

$$9x^2-4y^2-18x-16y-43=0.$$

puis la dessiner en repère orthonormé en précisant ses axes, ses sommets, ses foyers et ses directrices.

EXERCICE 2

Développer, par la formule du binôme de Newton, les polynômes suivants :

$$(x+1)^{2n},(x-1)^{2n} \quad \text{et} \quad \left(x^2-1\right)^{2n}$$

En déduire que la somme suivante :

$$1-\left(\mathrm{C}_{2n}^{1}\right)^2+\left(\mathrm{C}_{2n}^{2}\right)^2-\left(\mathrm{C}_{2n}^{3}\right)^2+\cdots+(-1)^{2n}\left(\mathrm{C}_{2n}^{2n}\right)^2$$

est égale a $(-1)^n\left[\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{n!}\right]$.

Pour cela, on étudiera le coefficient du terme en x^{2n} dans le produit des deux premiers polynômes, puis dans le troisième polynôme.

PROBLÈME

Soit la fonction, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par

$$x\ f(x)=x\mathrm{e}^{-x+1}.$$

1. Rappeler la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, puis étudier la fonction et la représenter en repère orthonormé.
   On trouvera le point d'inflexion de la courbe, qui sera nommée (γ), c'est-à-dire le point de (Γ), courbe représentative de f en lequel $f''(x)=0$.
2. Soit le nombre réel donné $\lambda>0$.
   Trouver l'aire du domaine situé entre la courbe, l'axe $x'x$ et la droite d'équation $x=\lambda$.
   Pour cela, on cherchera une primitive de f de la forme $x\longmapsto(ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$.
   Cette aire a-t-elle une limite quand λ tend vers $+\infty$?
3. On considère maintenant le mobile, M, suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t,\\ y &=& t\mathrm{e}^{-t+1},\ \forall t\in\mathbb{R}.\end{array}\right.$$

   Trouver la trajectoire du mobile, son vecteur vitesse, $\overrightarrow{\mathrm{V}}$, et son vecteur accélération, $\overrightarrow{\Gamma}$. On rappelle que le mouvement est dit accéléré dans l'intervalle $]t'\,;\,t''[$ de $\mathbb{R}$ si, dans cet intervalle, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{V}}\right\|^2$ est une fonction croissante du temps, c'est-à-dire si $\overrightarrow{\mathrm{V}}\cdot\overrightarrow{\Gamma}>0$, et retardé si c'est une fonction décroissante, c'est-à-dire si $\overrightarrow{\mathrm{V}}\cdot\overrightarrow{\Gamma}<0$.
   Préciser dans quels intervalles de $\mathbb{R}$ le mouvement est accéléré et dans quels intervalles il est retardé. Préciser aussi le sens du mouvement.

4. En utilisant le calcul, déjà fait, de $f'(x)$ et de $f''(x)$, exprimer $f^n(x)$ à l'aide de $f^{n-1}(x)$. Exprimer $f^n(x)$ à l'aide de $f(x)$, n et x.