Durée : 4 heures

Baccalauréat C Caen juin 1972

EXERCICE 1

Soit f la fonction, de]0 ; $+\infty$[dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{x\text{Log}\,x}{x-1}, \quad \text{pour } x \neq 1 \quad \text{et} \quad f(1) = 1$$

1. La fonction f est-elle continue dans]0 ; $+\infty$[?
   Calculer $f'(x)$ pour $x = f.1$.
2. Soit g la fonction de]0 ; $+\infty$[dans R, définie par

   $$g(x) = x - 1 - \text{Log}\,x.$$

   Étudier le sens de variation de g ; en déduire le signe de $g(x)$ et le sens de variation de f.

EXERCICE 2

Soit a et b deux entiers naturels donnés. On se propose de déterminer l'ensemble des solutions du système

$$\left\{\begin{array}{lll} x & \in & \mathbb{Z}, \\ x & \equiv & a \quad [9], \\ x & \equiv & b \quad [11]. \end{array}\right.$$

1. Démontrer que toutes les solutions sont congrues à un même nombre modulo 99. (On pourra utiliser l'identité de Bezout.)
2. Déterminer l'ensemble des solutions du système.

PROBLÈME

Soit (E) un plan affine rapporté à un repère cartésien $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$d'axes O$x$ et Oy. Il a pour espace vectoriel associé le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soit deux points distincts de (E), M de coordonnées (a, b) et M' de coordonnées $\left(a' ; b'\right)$. On désigne par P et P' les projections respectives de M et de M' sur Ox parallèlement à Oy, par Q et Q' les projections respectives de M et M' sur Oy parallèlement à Ox.

1. **a.** On suppose d'abord que les vecteurs $\overrightarrow{PQ'}$ et $\overrightarrow{P'Q}$ sont non nuls. Écrire, en fonction de a, b, a' et b', les équations des trois droites $PQ', P'Q$ et MM'. Démontrer que ces trois droites sont, soit parallèles, soit concourantes.

   b. Dans le cas où le vecteur $\overrightarrow{PQ'}$ est nul, quelle est la position relative des deux droites $P'Q$ et MM' ?

   Examiner aussi le cas où le vecteur $\overrightarrow{P'Q}$ est nul.
2. Soit un réel, α, non nul et le vecteur $\overrightarrow{t} + \overrightarrow{\imath} = \alpha\overrightarrow{\jmath}$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante (liant a, b, a', b' et α) pour que les trois vecteurs $\overrightarrow{PQ'}, \overrightarrow{P'Q}$ et $\overrightarrow{MM'}$ soient colinéaires à $\overrightarrow{t}$.
   Démontrer que la condition précédente définit une application f_α de (E) dans (E), telle que

$$\begin{cases} f_\alpha(M) & = & M' \quad \text{pour } M \neq \text{O} \\ f_\alpha(\text{O}) & = & \text{O}. \end{cases}$$

Démontrer que f_α est affine et involutive.

Démontrer que f_α est une symétrie, dont on précisera les éléments.

3. Soit φ_α l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ associée à f_α. Écrire la matrice de φ_α dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Soit Φ l'ensemble des applications f_α telles que α appartienne à l'ensemble des réels non nuls.

Soit x et y deux réels non nuls, calculer les matrices de $\varphi_\beta \circ \varphi_\gamma$ et de $\varphi_\gamma \circ \varphi_\beta$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Dans quel cas ces. deux matrices sont-elles égales ?

Soit δ un réel non nul. Démontrer que $\varphi_\gamma \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\delta$ appartient à Φ.

Démontrer que le composé d'un nombre impair d'éléments de Φ est un élément de Φ.