Durée : 4 heures

Baccalauréat C Caen septembre 1971

EXERCICE 1

Dans le plan complexe, on associe à tout point M d'affixe z, le point M' d'affixe z', tel que

$$z' = \mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i}.$$

Déterminer les éléments de la transformation $\mathcal{T}$ qui associe, au point M, le point M'.

EXERCICE 2

Le plan (P) étant rapporté à un repère orthonormé Ox, Oy, étudier l'ensemble (C) des points M du plan (P) dont les coordonnées x et y vérifient la condition

$$y^2 = (m-2)x^2 - 2(m+3)x + 5m$$

(m est un paramètre réel).
Déterminer la nature de (C) et, lorsqu'ils existent, le centre, les axes de symétrie et l'équation réduite de (C).

PROBLÈME

Soit un plan (P) rapporté à un repère orthonormé (x'Ox, y'Oy) et un point A de x'Ox d'abscisse $+a$ ($a > 0$). On définit la transformation (T) qui à un point M de coordonnées x et y du plan (P) associe le point M' de coordonnées x' et y' de ce même plan, tel que les droites OM et OM' soient perpendiculaires et les points A, M et M' alignés.

Partie A

1. Déterminer géométriquement la partie (E) de (P) sur laquelle la transformation (T) est définie.
2. Soit $\left(\text{E}'\right)$ l'ensemble des points de (E) qui n'appartiennent pas aux axes x'Ox et y'Oy. Démontrer que $T\left(\text{E}'\right)$ est contenu dans $\left(\text{E}'\right)$ et que la restriction de (T) à $\left(\text{E}'\right)$ est involutive.
3. Soit (C) l'ensemble des points M de $\left(\text{E}'\right)$, tels que

$$(M\text{A}, M\text{O}) = \theta \text{ (modulo } \pi) \quad \left(\theta \neq \frac{\pi}{2} \text{ et } \theta \neq 0\right)$$

Déterminer géométriquement le transformé de (C) par la transformation (T).

Partie B

1. Démontrer que les coordonnées des points M et M' vérifient les relations

$$x' = \frac{ay^2}{x^2 + y^2 - ax} \quad \text{et} \quad y' = \frac{-axy}{x^2 + y^2 - ax}$$

2. Soit I le point d'intersection de la droite MM' et de l'axe $y'y$. Quelle relation les abscisses x et x' des points M et M' doivent-elles vérifier pour que la division (A, I ; M, M') soit harmonique ? Quel est alors l'ensemble des points M ?

3. Quelle relation les abscisses x et x' des points M et M' doivent-elles vérifier pour que ces deux points se correspondent dans l'inversion de pôle A et de puissance a^2 ? En déduire que les coordonnées x et y de M vérifient la relation $y = \pm f(x)$, avec

$$f(x) = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Étudier les variations de la fonction f qui à x associe $f(x)$ et tracer pour $a = 4$ l'ensemble des points M (on prendra le centimètre comme unité de longueur).