

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Sud Cameroun juin 1972 ∞

EXERCICE 1

Étudier les deux fonctions réelles f et g suivantes, de la variable réelle x :

$$f : x \mapsto \text{Log} |e^x - 1| \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \text{Log} |e^x + 1|$$

Tracer les courbes représentatives (F) et (G) dans un repère orthonormé. Montrer que la première bissectrice est axe de symétrie pour l'ensemble $(F) \cup (G)$.

EXERCICE 2

Partie A

L'espace E est un espace vectoriel, de dimension supérieure à 1, sur \mathbb{R} . Soit L un automorphisme involutif de E dans E , donc tel que $L \circ L = I_E$ (application identique de E dans E).

1. Un vecteur \vec{u} non nul est dit vecteur propre pour L s'il existe un réel λ (appelé valeur propre) tel que $L(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$. Le vecteur \vec{u} est alors appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Montrer que les valeurs propres, si elles existent, ne peuvent être que 1 et -1 .

Étudier les cas où L est I_E c'est-à-dire l'application $\vec{u} \mapsto \vec{u}$, et l'application $\vec{u} \mapsto -\vec{u}$.

2. On suppose qu'il existe un automorphisme involutif, L , différent des deux applications précédentes.

Il existe donc un vecteur \vec{v} tel que $\vec{v} + L(\vec{v})$ soit différent de 0 et \vec{w} tel que $\vec{w} - L(\vec{w})$ soit différent de 0.

À quoi $L\left[\frac{1}{2}(\vec{v} + L(\vec{v}))\right]$ et $L\left[\frac{1}{2}(\vec{w} - L(\vec{w}))\right]$ sont-ils égaux?

En déduire que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $+1$ et celui des vecteurs propres associés à la valeur propre -1 ne sont pas vides.

On appelle \mathcal{V} l'ensemble constitué des vecteurs propres associés à $+1$ et de $\vec{0}$, et \mathcal{W} celui constitué des vecteurs propres associés à -1 et de $\vec{0}$.

Montrer que \mathcal{V} et \mathcal{W} sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Partie B

On suppose que E est l'espace vectoriel de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R} , rapporté à la base (\vec{i}, \vec{j}) .

1. Comment doit-on choisir les réels a, b, c et d pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ représente un automorphisme involutif, dans la base (\vec{i}, \vec{j}) ? Déterminer l'ensemble de ces matrices.
2. Soit S l'application linéaire représentée, dans (\vec{i}, \vec{j}) , par

$$\begin{pmatrix} m & m+1 \\ 1-m & -m \end{pmatrix}, \quad m \text{ étant un réel}$$

S est-elle involutive ?

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés.

On appellera \vec{I} un des vecteurs propres associés à $+1$ et \vec{J} un des vecteurs propres associés à -1 . $S(\vec{I}) = \vec{I}$ et $S(\vec{J}) = -\vec{J}$.

Montrer que (\vec{I}, \vec{J}) est une nouvelle base de l'espace.

Quelle est la matrice de S dans cette nouvelle base ?

3. Dans l'espace affine associé à E , rapporté au repère (O, \vec{I}, \vec{J}) , on définit l'application, s , qui, au point M , associe le point $M' = s(M)$, tel que $\overrightarrow{OM'} = S(\overrightarrow{OM})$. On appelle (C) la courbe ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = 1,$$

dans ce repère.

Donner, toujours dans le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) , l'équation de la courbe transformée de (C) par s . Que peut-on dire de (C) ?