Durée : 4 heures

Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1972

EXERCICE 1

Étudier la fonction numérique, de la variable réelle x, définie par

$$f(x) = x - \frac{1}{2}\text{Log}\left|2\text{e}^x - 1\right|.$$

On pourra écrire

$$2\text{e}^x - 1 = 2\text{e}^x\left(1 - \frac{1}{2}\text{e}^{-x}\right).$$

Construire, dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant les variations de cette fonction (on tracera les asymptotes de cette courbe).

EXERCICE 2

À chaque nombre complexe $z = x + \text{i}y$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) on associe le point $M(z)$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.
Trouver l'équation de l'ensemble, E, des points $M(z)$ tels que les points

$$M(z), \quad M'\left(z^2\right) \quad \text{et } M''\left(z^5\right)$$

soient alignés.
Étudier et dessiner l'ensemble E.

PROBLÈME

Le plan affine, $\mathcal{P}$, est rapporté au repère cartésien $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.
Le nombre λ étant un réel donné, on considère l'application f_λ qui au point m de coordonnées $(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point M dont les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ sont

$$X = x + (\lambda - 1)y \quad \text{et} \quad Y = 2x + (\lambda - 2)y.$$

Partie A

1. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles f_λ est bijective.
   Déterminer, quand elle existe, f_λ^{-1}, application réciproque de f_λ, en donnant les coordonnées de m en fonction de celles de M.
   Existe-t-il des valeurs de λ pour lesquelles f_λ est involutive ?
   Déterminer, suivant les valeurs de λ, l'ensemble des points invariants par f_λ
2. Quelle est la nature géométrique de f_1 ?
3. Dans cette question on étudie f_0.
   Déterminer l'ensemble, (Δ), des points M de $\mathcal{P}$, tels qu'il existe au moins un point m tel que $f_0(m) = M \in (\Delta)$.
   Un point M de (Δ) étant fixé, déterminer l'ensemble des points m tels que $f_0(m) = M$.
   Montrer que f_0 est la composée d'une projection et d'une homothétie, que l'on déterminera .

Partie B

On pose $f_\lambda^2 = f_\lambda \circ f_\lambda$ et, pour tout entier n supérieur à 2, $f_\lambda^n = f_\lambda \circ f_\lambda^{n-1}$.

1. k étant un nombre réel donné, quel est l'ensemble des transformés par f_λ^n des points de la droite (D_k) d'équation $y = x + k$?
2. Soit A_0 le point de coordonnées (1 ; 0). On pose $\mathrm{A}_1 = f_\lambda\left(\mathrm{A}_0\right)$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\mathrm{A}_n = f_\lambda^n\left(\mathrm{A}_0\right)$.
   Montrer, par récurrence, que les coordonnées $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ de A_n sont, pour tout entier naturel non nul n, de la forme
   $$x_n = 2u_n(\lambda) + (-1)^n \quad \text{et} \quad y_n = 2u_n(\lambda),$$
   $u_n(\lambda)$ étant un polynôme en λ de degré $(n-1)$.
   Préciser la relation qui existe entre $u_n(\lambda)$ et $u_{n+1}(\lambda)$.
   En déduire que, si $\lambda \neq -1$, $u_n(\lambda) = \dfrac{\lambda^n - (-1)^n}{\lambda + 1}$.
   Étudier le cas où $\lambda = -1$.