Durée : 4 heures

Baccalauréat C Dakar juin 1972

EXERCICE 1

Soit f la fonction réelle, de variable réelle, qui à x associe $f(x)$ défini par

$$f(x) = \text{Log}\,(\text{Log}\,x),$$

où Log x représente le logarithme népérien de x.

1. Étudier cette fonction et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
   (Indication : Pour étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ on pourra poser Log $x = y$.)
2. Peut-on définir la fonction réciproque, f^{-1}, pour toutes les valeurs de x ? Définir cette fonction et tracer sa représentation graphique dans le même repère.

EXERCICE 2

Soit λ un paramètre réel.

1. Discuter, suivant les valeurs de λ, la nature de la courbe qui a pour équation, en axes rectangulaires,
$$y^2 + \lambda x^2 + (\lambda + 1)x - \frac{\lambda}{4} = 0.$$
2. Donner, le cas échéant, les coordonnées de son centre de symétrie et les équations de ses asymptotes.

PROBLÈME

Soit (E) le plan vectoriel euclidien et soit f l'application de (E) dans (E) qui au vecteur $\overrightarrow{v}\,(x\,;\,y)$ associe le vecteur $\overrightarrow{V}\,(X\,;\,Y)$ de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où a, b, c et d sont des coefficients réels tels que $bd \neq 0$.

Partie A

1. Soit $m \in R_+^\star$. Quelles conditions les coefficients a, b, c, d doivent-ils vérifier de façon que, pour tout $\overrightarrow{v} \in (E)$, on ait
$$\left\| f\left(\overrightarrow{v}\right) \right\| = m \left\| \overrightarrow{v} \right\|$$
   (on note $\|vectv\|$ la norme du vecteur $vectv$) ?
   Montrer que, si ces conditions sont réalisées, f est un automorphisme de (E) [c'est-à-dire une application linéaire et bijective de (E) dans (E)].

2. Soit $m = 1 + t^2$, où t est un nombre réel. On pose

$$a = 1 - t^2 \quad \text{et} \quad c = -2t.$$

Déterminer b et d de façon que, pour tout $\overrightarrow{v} \in (E)$,

$$\left\|f\left(\overrightarrow{v}\right)\right\| = m\left\|\overrightarrow{v}\right\|.$$

On obtient ainsi deux applications, f_1 et f_2. Nous appellerons f_1 celle pour laquelle b b et c sont de signes contraires.

Partie B

1. Soit $\overrightarrow{v} \in (E)$. On pose $f_1\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{V_1}$ et $f_2\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{V_2}$ avec

$$\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix}X_2\\Y_2\end{pmatrix}$$

Soit z, Z_1 et Z_2 les nombres complexes suivants :

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad Z_1 = X_1 + \mathrm{i}Y_1 \quad \text{et } Z_2 = X_2 + \mathrm{i}Y_{2'2}$$

On définit ainsi deux applications, φ_1 et φ_2 de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes) par

$$\varphi_1(z) = Z_1 \quad \text{et} \quad \varphi_2(z) = Z_2$$

Montrer qu'il existe un nombre complexe fixe, ξ, tel que $\varphi_1(z) = Z_1 = \xi z$.

Exprimer alors $\varphi_2(z) = Z_2$ en fonction de ξ et de z. Quelle relation existe-t-il entre Z_1 et Z_2 ?

2. On pose $t = \text{tg}\,\alpha$.

a. Déterminer ξ par son module et son argument.

b. Quelle est, suivant la valeur de α, la nature des applications f_1 et f_2 ?

c. Comment doit-on choisir z pour que $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$?

Partie C

Dans le plan complexe, M est l'image de z, M_1 celle de Z_1, M_2 celle de Z_2 et A celle de $Z_0 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

1. Lorsque M décrit le cercle de centre A et de rayon R, définir géométriquement la courbe $(\mathscr{C}_1)$ décrite par M_1 et la courbe $(\mathscr{C}_2)$ décrite par M_2.

2. Comment doit-on choisir α et t pour que $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ soient confondues ?