

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Départements d'Outremer ∞
juin 1972

EXERCICE 1

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- (1) $\text{Log}(x+3) + \text{Log}(x+2) = \text{Log}(x+11)$,
- (2) $\text{Log}(x^2 + 5x + 6) = \text{Log}(x+11)$,
- (3) $\text{Log}(-x-2) = \text{Log}\left(\frac{-x-11}{x+3}\right)$,
- (4) $\text{Log}(x+2) = \text{Log}(-x-11) - \text{Log}(x+3)$.

EXERCICE 2

Soit N un entier naturel dont la décomposition en facteurs premiers est $a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$.

1. Démontrer que la somme $\sigma(N)$ des diviseurs de N est

$$\sigma(N) = (1 + a + \dots + a^\alpha)(1 + b + \dots + b^\beta)(1 + c + \dots + c^\gamma).$$

Appliquer ce résultat au nombre 175.

2. Un entier, N , est dit parfait si

$$\sigma(N) = 2N.$$

Montrer que si $2^n - 1$ est premier, l'entier $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ est parfait.

EXERCICE 2

Ce problème a pour but l'étude de la famille de courbes (C_m) d'équation

$$(m^2 - 1)y^2 - 2mxy + x^2 + 2y + 3 = 0.$$

Le repère initial (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé.

Ce problème se décompose en trois parties A, B et C indépendantes et pouvant être traitées par le candidat dans l'ordre qui lui conviendra. Toutefois, il serait bon de commencer par A.

Partie A

1. *Cas particuliers* : $m = +1$ et $m = -1$.

Écrire les équations de (C_1) et de (C_{-1}) sous la forme

$$y = ax + b + \frac{c}{mx - 1}$$

(a, b et c étant des nombres réels à déterminer).

Étudier succinctement et représenter sur un même graphique, tracé dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , les courbes (C_1) et (C_{-1}) . (On pourra choisir comme unité de longueur 2 cm et l'on emploiera des couleurs distinctes pour chacune des courbes.)

2. Étude du cas : $m = 0$

Démontrer qu'il existe un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) par rapport auquel la courbe (C_0) a une équation de la forme $y^2 - x^2 = 1$.

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Tracer la courbe (C_0) .

- 3.** Démontrer que les trois centres de symétrie, Ω_{-1}, Ω_0 et Ω_1 , des courbes $(C_{-1}), (C_0)$ et (C_1) appartiennent à une droite (D) , dont on précisera l'équation par rapport au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie B

On considère maintenant (O, \vec{I}, \vec{J}) défini par

$$\vec{I} = \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{J} = m\vec{i} + \vec{j}.$$

Démontrer que, pour tout m , (O, \vec{I}, \vec{J}) peut être pris comme nouveau repère.

On désigne par X et par Y les nouvelles coordonnées d'un point M de (C_m) dans le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) .

Quelle forme l'équation de (C_m) prend-elle alors, dans ce nouveau repère?

En s'inspirant du A 2. en déduire la nature de la famille des courbes (C_m) . Quelles sont alors les coordonnées de leur centre de symétrie, Ω_m dans ce nouveau repère?

Démontrer que Ω_m appartient à la droite (D) (considérée dans la question 3. du A.

Partie C

Soit O'_m le point de coordonnées $(m; 1)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Former l'équation de la famille (C_m) dans le repère (O'_m, \vec{i}, \vec{j}) .
- Vérifier que $(C_{\sqrt{\frac{3}{2}}})$ a pour équation, dans le repère $(O'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}, \vec{i}, \vec{j})$

$$Y^2 - 2\sqrt{6}XY + 2X^2 + 8 = 0.$$

- Soit f l'application qui, à tout point M du plan de coordonnées $(x; y)$, dans le repère $(O'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}, \vec{i}, \vec{j})$, fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que

$$\begin{cases} x' &= 2x - \sqrt{6}y, \\ y' &= -\sqrt{6}x + y. \end{cases}$$

Soit (D_1) la droite définie par le point $O'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}$ et le point U_1 de coordonnées

$(\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}})$ et (D_2) la droite définie par le point $O'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}$ et le point U_2 de coordonnées

$(-\sqrt{\frac{3}{5}}; \sqrt{\frac{2}{5}})$. Démontrer que les droites (D_1) et (D_2) sont globalement invariantes par l'application f .

Soit

$$\vec{V}_1 = \overrightarrow{O'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}U_1} \quad \text{et} \quad \vec{V}_2 = \overrightarrow{O'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}U_2};$$

former l'équation de $(C_{\sqrt{\frac{3}{2}}})$ dans le repère $(O'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}, \vec{V}_1, \vec{V}_2)$.