Durée : 4 heures

Baccalauréat C Dijon juin 1972

EXERCICE 1

Le nombre $\overline{z}$ est le nombre complexe conjugué du nombre complexe z non nul; calculer en fonction du module, ρ, et de l'argument, θ, de z, le module et l'argument du nombre complexe Z tel que

$$Z = z - \left(\cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\overline{z}.$$

EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien de repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère l'ensemble (Γ_λ) des points M dont les coordonnées $(x\,;\, y)$ vérifient l'équation

$$y^2 = -2x^2 + 2\lambda x + 1 - \lambda^2 \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Préciser, suivant les différentes valeurs de λ, la nature de (Γ_λ) et ses éléments remarquables.

PROBLÈME

1. On considère l'application f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par xn

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\text{e}^{1-x} \quad (n \text{ entier naturel non nul}).$$

a. Calculer la limite de $\text{Log}\left[\frac{x^n}{\text{e}^x}\right]$ quand x tend vers $+\infty$.

En déduire la limite de $\frac{x^n}{n!}$ quand x tend vers $+\infty$.

b. Donner le tableau de variations de f_n en distinguant les deux cas suivants :

n est pair, et n est impair.

c. Tracer, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les courbes représentatives des fonctions f_2 et f_3 ; on précisera la position relative de ces courbes.

d. En revenant au cas général, montrer que, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors on a

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}$$

2. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{n!}\text{e}^{1-t}\,\text{d}t$.

a. Quelle est la dérivée de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à t associe e^{1-t} ?

En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur de I_1.

b. De même, en intégrant I_n par parties, vérifier la relation de récurrence

$$I_n - I_{n-1} = -\frac{x^n}{n!}\text{e}^{1-x}.$$

c. Démontrer que l'on a

$$I_n = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{1-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right]$$

c'est-à -dire

$$I_n = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{1-x}\sum_{p=0}^{p=n}\frac{x^n}{p!}.$$

Quelle est la limite, pour n fixé, de I_n quand x tend vers $+\infty$?

3. Dans toute cette question, on donne à x la valeur 1 et l'on pose

$$J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

a. Démontrer que $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n!}$.
En déduire, en utilisant le calcul de I_n, que

$$0 \leqslant \mathrm{e} - \left[\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}\right] \leqslant \frac{1}{n!}$$

et

$$\left[\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}\right] \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left[\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}\right] + \frac{1}{n!}.$$

b. Quelle est la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\left[\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}\right]$?

c. En calculant $\left[\displaystyle\sum_{p=0}^{7}\frac{1}{p!}\right]$ donner le meilleur encadrement, permis par ce calcul, du nombre e.