Durée : 4 heures

Baccalauréat C Djibouti juin 1972

EXERCICE 1

On donne la fonction f, telle que

$$f(x) = x\sin x \quad \text{et } x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque, f^{-1}.
2. Étudier la dérivabilité de f et calculer la dérivée de f lorsqu'elle existe.
3. Étudier la dérivabilité de f^{-1} et calculer la dérivée de f^{-1} lorsqu'elle existe.
4. Construire sur un même graphique, le repère étant orthonormé, les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

EXERCICE 2

On rappelle que l'ensemble, S, des suites réelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On notera (U_n) une suite et U_n, $n \in \mathbb{N}$, le terme de rang $n+1$ de la suite (U_n). On considère l'ensemble (E) des suites (U_n) vérifiant la relation $\mathcal{R}$:

$$U_n = 5U_{n-1} - 6U_{n-2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0,\,;\,1\}.$$

1. Montrer que (E) est un sous-espace vectoriel de S.
2. On donne la suite géométrique (U_n) telle que $U_n = r^n$. Montrer qu'il existe deux valeurs de r telles que la suite géométrique correspondante soit élément de (E). On notera ces deux suites (a_n) et (b_n).
3. Soit $(U_n) \in E$. Montrer qu'il existe α et β réels, tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} U_0 & = & \alpha a_0 + \beta b_0 \\ U_1 & = & \alpha a_1 + \beta b_1 \end{array}\right.$$

   Montrer que $U_n = \alpha a_n + \beta b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En déduire une base de (E).

PROBLÈME

Notations et questions préliminaires

Si f est une application, on notera f^2 l'application composée, $f \circ f$, et f^3 l'application composée $f \circ f \circ f$.

(E) est un plan vectoriel euclidien et (P) est un plan affine euclidien associé à (E). Les points O, A, B et C, sont des points de (P) tels que, dans un repère orthonormé, les coordonnées de O sont (0 ; 0), de A(1 ; 0), de C(0 ; −1) et de B(−1 ; 1).

On note $\overrightarrow{\text{OA}} = a$, $\overrightarrow{\text{OB}} = b$ et $\overrightarrow{\text{OC}} = c$.

Représenter les points 0, A, B et C sur une figure.

Montrer que les systèmes $\left\{\vec{a}, \vec{b}\right\}$ et $\left\{\vec{b}, \vec{c}\right\}$ sont deux systèmes libres.

Partie A

1. f est une application linéaire de (E) dans (E) telle que $f\left(\vec{a}\right) = \vec{b}$ et $f\left(\vec{b}\right) = \vec{c}$.

   Montrer que le sous-ensemble $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ est invariant par f.

2. Montrer que $f^3 = \text{I}$ [O étant l'application identique de (E)].
3. f est-elle bijective ?
4. Existe-t-il des vecteurs invariants par f ? Existe-t-il des droites vectorielles invariantes par f ?

Partie B

g est l'application affine de (P) dans (P), associée à f et laissant O invariant :

$$M' = g(M) \iff \text{O}M' = f(\text{O}M).$$

1. Montrer qu'une droite a pour image, par g, une droite.
   Quel est la transformée de la droite (AB) ; de la droite (BC) ?
   Existe-t-il des droites parallèles à leur transformée ?
2. Soit $\mathscr{R}$ le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ du plan affine (P).
   Soit $(x\,;\, y)$ les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}$ et $\left(x'\,;\, y'\right)$ celles de M' dans ce repère $\mathscr{R}$, avec $M' = g(M)$. x = y'-
   Montrer que $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & y' - x' \\ y & = & -x'. \end{array}\right.$
3. Montrer que, si une courbe admet O comme centre de symétrie, sa transformée par g admet aussi O comme centre de symétrie.

Partie C

Soit (C) une courbe admettant O comme centre de symétrie, passant par les trois points A, B et C et dont l'équation dans le repère $\mathscr{R}$ est de la forme

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \epsilon y + \varphi = 0,$$

α, β, γ, δ, ϵ et φ étant des nombres réels.

1. Montrer que, puisque (C) admet O comme centre de symétrie, on a $\delta = \epsilon = 0$.
   En déduire l'équation de (C).
2. Former, en utilisant le B 2., l'équation de (C'), transformée de (C) par g. Pouvait-on prévoir le résultat ?
3. Pour déterminer la nature de (C), on choisit un repère $\mathscr{R}' = \left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{b}\right)$, avec $\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$.
   Calculer $\overrightarrow{\imath}$ en fonction de $\overrightarrow{a}$ et de $\overrightarrow{b}$, puis les coordonnées $(x\,;\, y)$ d'un point M dans. le repère $\mathscr{R}$ en fonction de ses coordonnées $(X\,;\, Y)$ dans le repère $\mathscr{R}'$.
   En déduire l'équation de (C) dans le repère $\mathscr{R}'$ et sa nature. Construire la courbe (C).