**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat C Lille juin 1972 ∾

**EXERCICE 1**

On notera 0, 1, 2, ..., $(n-1)$ les éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, l'équation
$$x^2+2x-3=0.$$
2. Trouver les diviseurs de zéro dans l'anneau Z/21Z. 30 Résoudre, dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$, l'équation
$$x^2+2x-3=0.$$

**EXERCICE 2**

On considère la fonction numérique $f$, d'une variable réelle, définie par
$$f(x)=2x-x\text{Log}\,x$$
(Log $x$ désigne le logarithme népérien de $x$).

1. Déterminer les limites de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand $x$ tend vers 0 et quand $x$ tend vers $+\infty$.
Étudier les variations de la fonction $f$ et construire sa représentation graphique (C) dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ ; l'unité de longueur étant le segment dont la mesure, en centimètres, est $\dfrac{1}{2}$.
Déterminer les coordonnées du point P, intersection de la courbe (C) et de l'axe des abscisses.
2. En utilisant une intégration par parties, trouver l'aire, $\mathcal{A}(\lambda)$, du domaine plan défini par
$$\lambda \leqslant y \leqslant \text{e}^2, \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$
et $\lambda$ satisfaisant à la condition $0<\lambda<\text{e}^2$.
Déterminer la limite, $\mathcal{A}$, de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers 0.
On donnera une valeur approchée de $\mathcal{A}$ en centimètres carrés avec la précision que permet la donnée de e, à $2.10^{-4}$ près, e $\approx 2,718$.

**PROBLÈME**

**Partie A**

Soit (P) le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. On désigne par l'application de (P) dans (P) qui, au point $M$ de coordonnées $x$ et $y$, associe le point $M'$ de coordonnées $x'$ et $y'$ définies par les relations
$$x'=2x+3y \quad \text{et} \quad y'=x+2y.$$
On note $M'=f(M)$.

1. Quel est l'ensemble des points invariants de l'application $f$ ?
Montrer que $f$ est une application affine de (P) dans (P) et qu'elle est bijective.
Quelle est l'image d'une droite par $f$ ?
Quelle est l'image d'une paire de droites parallèles ?
2. **a.** On se propose de chercher s'il existe des points, $M$ dont les transformés, $M'$, par $f$ satisfont à une relation de la forme

$$(1) \qquad \overrightarrow{\mathrm{O}M'} = k\overrightarrow{\mathrm{O}M},$$

$k$ étant une constante donnée non nulle.
Montrer qu'il existe, pour la constante $k$, deux valeurs possibles, et deux seulement, $k_1$ et $k_2$, si l'on impose à $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ d'être non nul.
Déterminer, pour chacune de ces deux valeurs, les ensembles $(D)$ et $(D')$ des points $M$ satisfaisant à (1).
Mon!rer que $(D)$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{I} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\imath} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\jmath}$ et que $(D')$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{J} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\imath} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\jmath}$.
Quelles sont les restrictions de $f$ respectivement à $(D)$ et à $(D')$ ?

   **b.** Le plan (P) étant rapporté au repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, les coordonnées d'un point quelconque, $M$, sont désignées par $X$ et par $Y$, celles de $M' = f(M)$ par $X'$ et par $Y'$ ; montrer que l'on a

$$X' = \left(2-\sqrt{3}\right)X \quad \text{et} \quad Y' = \left(2+\sqrt{3}\right)Y.$$

3. On suppose $M$ non situé sur $(D)$ ou sur $(D')$.
   **a.** Montrer que $M$ et $M'$ appartiennent à une hyperbole, $(H)$, asymptote aux droites $(D)$ et $(D')$.
   **b.** Soit $(H)$ l'hyperbole d'équation $XY = h$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Montrer que l'équation de la droite, $(\Delta)$, tangente à $(H)$ au point $M_0\,(X_0~;~Y_0)$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{X}{2X_0} + \frac{Y}{2Y_0} - 1 = 0.$$

En déduire que la droite $\left(\Delta'\right)$, image de $(\Delta)$ par $f$, esL tangente à $(H)$ au point $M_0' = f\left(M_0\right)$.
4. Soit $(L)$ une droite qui coupe $(D)$ et $(D')$ respectivement en A et en B. On note $\mathrm{A}' = f(\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}' = f(\mathrm{B})$. Montrer que, s'il existe un réel $\lambda$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, alors $\overrightarrow{\mathrm{A}'M'} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$.
La droite $(L)$ étanL donnée, montrer qu'il existe une similitude, $g$, telle que, quel que soit $M \in (L)$, on a $M' = g(M)$.

**Partie B**

On pose $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$. Les formules de récurrence,

$$u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n,$$

définissent deux suites illimitées d'entiers naturels $(u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ et $(v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots)$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 - 3v_n^2 = 1$.

**2.** Établir les formules de récurrence

$$u_{n+1} + u_{n-1} = 4u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} + v_{n-1} = 4v_n.$$

**3.** On désigne par $A_n$ le point de coordonnées $x = u_n$ et $y = v_n$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la partie A.

Montrer que les points $A_0$, $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$, ... appartiennent à une même conique. Préciser éventuellement les asymptotes.

Montrer que la droite $(\text{O}A_n)$ passe par le milieu du segment $[A_{n-1}A_{n+1}]$. En déduire une construction du point $A_{n+1}$ à partir des points $A_{n-1}$ et $A_n$.