Durée : 4 heures

Baccalauréat C Maroc juin 1972

EXERCICE 1

1. Montrer que, pour $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, la fonction $y \longmapsto \sin y$ admet une fonction réciproque, notée φ.
   Déterminer le domaine de définition de φ.
2. Démontrer que φ est dérivable pour $0 < x < 1$ et admet pour dérivée en x

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   La fonction φ est-elle dérivable pour $x = 0$ et pour $x = 1$?
3. Préciser le domaine de définition de la fonction $x \longmapsto \varphi\left(\cos^2 x\right)$ et calculer sa dérivée lorsqu'elle existe.

EXERCICE 2

Soit $\mathcal{M}_2$ l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients réels.
Soit les matrices suivantes :

$$\text{I} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{J} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}'$ l'ensemble des combinaisons linéaires $\alpha\text{I} + \beta\text{J}$, $(\alpha\ :\ \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. Démontrer que $\mathcal{M}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$, dont on déterminera une base.
2. Calculer J^n.
   Si $A = \alpha\text{I} + \beta\text{J}$, calculer A^n.
3. On considère la suite $\left(x_n,\ y_n\right)$ de $\mathbb{R}^2$ d'éfinie par

$$\left(x_0\ ;\ y_0\right) = (1\ ;\ 1) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}.$$

   a. Calculer x_n et y_n en fonction de n.
   b. Démontrer que, pour $|\alpha| < 1$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} y_n = 0$.

PROBLÈME

Soit g_a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g_a(x) = \sqrt{a+x}, \quad a \text{ étant un paramètre réel.}$$

1. **a.** Étudier cette fonction.
   b. On désigne par (C_a) la courbe d'équation $y = g_a(x)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   Soit $\left(C'_a\right)$ la transformée de (C_a) dans la symétrie orthogonale d'axe $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\right)$.
   Déterminer la nature géométrique de $(\Gamma_a) = (C_a) \cup \left(C'_a\right)$. Construire (Γ_a).
   Montrer que $\left(\Gamma_{a_1}\right)$ se déduit de $\left(\Gamma_{a_2}\right)$ par une translation, que l'on caractérisera.

2. **a.** Déterminer les primitives de g_a.

   b. Déterminer la valeur du paramètre a, tel que

$$\int_{-a}^{3} \sqrt{a+x}\,\mathrm{d}x = 18.$$

   c. Dans le cas où a prend la valeur calculée précédemment, déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C_a) et de la droite d'équation $y = x$.

3. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} U_0 & = & 0 \\ U_{n+1} & = & \sqrt{6+U_n}. \end{array}\right.$$

   a. Calculer U_1, U_2 et U_3.

   b. Montrer que cette suite est strictement croissante et majorée par 3.

   c. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$3 - U_{n+1} \leqslant \frac{3-U_n}{3}.$$

   En déduire que $3 - U_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3^n}$.

   Démontrer que la suite U_n possède une limite ℓ, que l'on déterminera.