Durée : 4 heures

Baccalauréat C Mexico juin 1972

EXERCICE 1

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$4\mathrm{e}^{-5x} + 3\mathrm{e}^{-3x} - \mathrm{e}^{-x} = 0,$$

e étant la base des logarithmes népériens et x l'inconnue.

EXERCICE 2

1. Déterminer les entiers naturels, α et β, ayant 11 pour PGCD et 10 164 pour produit.
2. Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation

$$77x - 132y = 44.$$

   On cherchera d'abord une solution particulière, puis on déterminera tous les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation.

PROBLÈME

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$.
On considère la famille des courbes d'équation

$$4mx^2 + 4max + 16y^2 - m^2a^2 = 0,$$

où m est un paramètre réel et a une longueur donnée $(a > 0)$.

1. Étudier suivant les valeurs de m la nature des courbes correspondantes.
2. Dans cette partie seulement, on choisit $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
   On désigne par (C) la courbe obtenue pour $m = -4$.
   a. Montrer que (C) est une conique, dont on déterminera le centre, ω, les foyers, les sommets et éventuellement les asymptotes. Calculer son excentricité. Tracer la courbe (C).
   b. Calculer la dérivée de la fonction g définie par

$$g(t) = t\sqrt{t^2+1} + \mathrm{Log}\left(t + \sqrt{t^2+1}\right),$$

   où Log est le symbole de la fonction logarithme népérien.
   c. Écrire l'équation de la courbe (C) dans le repère $\left(\omega\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes $X'\omega X$ et $Y'\omega Y$.
   Mettre cette équation sous la forme $Y^2 = f(X)$. Calculer l'aire du domaine plan borné limité par la courbe (C), l'axe $y'\mathrm{O}y$ et l'axe $Y'\omega Y$.
3. Le paramètre a étant de nouveau quelconque, on désigne par (E) la courbe obtenue pour $m = 3$.
   a. Montrer que (E) est une conique. Préciser le centre, les foyers et les sommets de (E). Calculer son excentricité e. Tracer (E).

b. M étant un point de (E), calculer, en fonction de a et de l'abscisse x de M, l'expression rationnelle de la longueur OM.

On note angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{O}M}\right) = \theta$. Calculer la longueur O$M$, en fonction de a et de e.

c. À chaque point M de (E) on associe son affixe z.

Donner l'expression de z, en fonction de a et de e uniquement.

d. Soit z' et z'' les affixes des points M' et M'' de (E) d'arguments respectifs α et $\alpha + \pi$.

α. Calculer, en fonction de a et de α, le nombre complexe $z' - z''$. En déduire la longueur $M'M''$.

β. On considère le point P d'affixe Z définie par

$$\frac{2}{Z} = \frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}.$$

Calculer Z en fonction de a et de α.

En déduire l'ensemble des points P quand α varie.