Durée : 4 heures

Baccalauréat C Montpellier juin 1972

EXERCICE 1

Déterminer les restes de la division par 13 des quatre premières puissances de 5.
En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre

$$N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$$

est divisible par 13.

EXERCICE 2

On considère l'espace vectoriel, $\mathcal{P}_3$ sur le corps des nombres réels, $\mathbb{R}$, des applications polynômes, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à 2. Un élément, P, de $\mathcal{P}_3$ est déterminé par ses coefficients, a, b et c, réels et il définit la fonction

$$x \longmapsto P(x) = ax^2 + bx + c.$$

1. Démontrer que les ensembles suivants :

$$A = \left\{P \in \mathcal{P}_3 / P(x) = ax^2 + bx, \quad (a,\ b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$$\text{et } B = \left\{P \in \mathcal{P}_3 / P(x) = \lambda x^2 - 2\mu x + \lambda, \quad (\lambda,\ \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

   sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}_3$.
   Déterminer une base de A et une base de B et en déduire les dimensions de A et de B.
2. Déterminer l'intersection $A \cap B$ des deux sous-espaces A et B et la dimension de cette intersection.
3. Soit f l'application de $\mathcal{P}_3$ vers $\mathcal{P}_3$ définie par

$$P \longmapsto Q = f(P),$$

   où Q est la fonction polynôme définie par $Q(x) = P(x) + (x-1)P'(x)$, P' étant la fonction dérivée de P.
   Montrer que f est une application linéaire.

PROBLÈME

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, à tout nombre complexe $z = x + \text{i}y$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) on associe le point, m, de coordonnées x et y ; m est dit image de z, z est dit affixe de m. On désigne par A, B, C et D les images respectives des nombres -1, $+1$, $\dfrac{1}{3}$ et 3 et par (C) le cercle de diamètre [AB].
À tout point m, différent de D, on associe son affixe z, puis le nombre complexe

$$Z = \frac{(3z-1)z}{z-3},$$

et enfin l'image M de Z.
On désigne par T l'application qui à m associe M.

1. Démontrer que Z peut s'écrire sous la forme $Z = az + b + \dfrac{c}{z-3}$ les nombres a, b et c étant des nombres réels.
2. On suppose que m parcourt l'axe $x'\mathrm{O}x$. Étudier alors la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{(3x-1)x}{x-3}$$

et tracer sa courbe représentative. En déduire l'image du segment [AB] par T. Calculer l'aire comprise entre la courbe, son asymptote oblique et les droites d'équations respectives $x = \mathrm{e} + 3$ et $x = 6$ (e désignant la base des logarithmes népériens).

3. Soit $Z_1 = \dfrac{3z-1}{3-z}$; démontrer· que $|Z_1| = 3\dfrac{m\mathrm{C}}{m\mathrm{D}}$ et $\arg Z_1 = \left(\overrightarrow{m\mathrm{D}}, \overrightarrow{\mathrm{C}m}\right)$.
4. Quel est l'ensemble des points m tels que $\dfrac{m\mathrm{C}}{m\mathrm{D}} = \dfrac{1}{3}$?

En déduire que pour ces points on a $|z| = |Z_1| = |Z| = 1$.

On suppose que m appartient au demi-cercle (C') de diamètre [AB] qui contient l'image de i. Soit θ l'argument de $z\,(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ et φ l'argument de Z_1.

Montrer que $\sin\varphi \geqslant 0$.

On suppose $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Calculer $cos\varphi$ en fonction de $\cos\theta$ et en déduire que φ est une fonction croissante de θ.

Calculer une valeur approchée de φ lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.