

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nancy-Metz juin 1972 ∞

EXERCICE 1

Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $5a - 2b = 357$ et dont le P.G.C.D. est égal à 119.

EXERCICE 2

Dans un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) , on donne les vecteurs $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \sqrt{2}\vec{i} + \alpha\vec{j}$, où α est un nombre réel positif.

1. Comment faut-il choisir α pour qu'il existe une rotation vectorielle r telle que $r(\vec{u}) = \vec{v}$?

Déterminer alors la matrice de r dans la base (\vec{i}, \vec{j}) et l'angle de r .

2. Soit $\vec{w} = -\vec{i} + 3\vec{j}$. Montrer qu'il existe une isométrie vectorielle négative, s , et une seule, telle que $\vec{w} = (s \circ r)(\vec{u})$.

Déterminer la matrice de s dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

PROBLÈME

Pour tout nombre réel, α , strictement positif, on désigne par f_α la fonction numérique, de variable réelle, définie par la relation

$$f_\alpha(x) = \frac{\text{Log}(\alpha x)}{x}$$

et par (C_α) la courbe représentative de f_α dans un repère orthonormé.

Partie A

1. Étudier les variations de f_1 et construire (C_1) .
Plus généralement, étudier les variations de f_α préciser les asymptotes à la courbe (C_α) et déterminer son intersection avec l'axe $x'Ox$.
2. Calculer en fonction de α l'aire du domaine limité par l'axe $x'Ox$ et la courbe (C_α) et dont les points ont une abscisse inférieure à $\frac{e}{\alpha}$.

Partie B

1. Soit a un nombre réel strictement positif.
Déterminer, suivant les valeurs de a , le nombre de solutions de l'équation

$$a^x = x \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

(On pourra utiliser les variations de f_1 .)

2. En utilisant de même les variations de f_1 , montrer qu'il existe un couple (b, c) , et un seul, d'entiers naturels non nuls tels que

$$b^c = c^b \quad \text{avec } b < c.$$

Déterminer ce couple.

Partie C

1. Soit α et β deux nombres réels strictement positifs distincts et λ un nombre réel différent de 1. Pour tout nombre réel x strictement positif, on note M_1 et M_2 les points des courbes (C_{α_1}) et (C_{α_2}) admettant x pour abscisse et l'on désigne par M le barycentre des points M_1 et M_2 affectés respectivement des coefficients 1 et $-\lambda$.

Démontrer que l'ensemble décrit par M lorsque x parcourt $]0 ; +\infty[$ est l'une des courbes (C_α) .

2. Soit t un nombre réel strictement positif. Écrire l'équation de la tangente (T_α) à la courbe (C_α) au point d'abscisse t .

Démontrer que, lorsque α varie, t restant fixe, les droites (T_α) passent par un point fixe, I_t . Déterminer l'ensemble, (H) , des points I_t , quand t parcourt $]0 ; +\infty[$, et construire (H) .