Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nice juin 1972

EXERCICE 1

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par

$$x \longmapsto f(x) = x\text{Log}\, x$$

(Log x désigne le logarithme népérien de x).

1. Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative (G) dans un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.
2. Déterminer les primitives de f en faisant une intégration par parties et calculer l'aire du domaine plan fini limité par (G), l'axe $x'\text{O}x$ et les droites d'équations respectives $x = \sqrt{\text{e}}$ et $x = \text{e}^2$?

   On donnera une valeur approchée de cette aire, avec la précision permise par les tables de logarithmes.

EXERCICE 2

Soit E l'ensemble des matrices carrées, M, à deux lignes et deux colonnes, de la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} \quad (p \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{R},\ |p| \neq |q|).$$

1. Montrer que E est un sous-groupe commutatif du groupe multiplicatif des matrices inversibles. On rappelle qu'une matrice est inversible si son déterminant est différent de 0.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier positif, la puissance n-ième de M s'écrit

$$M^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (p+q)^n + (p-q)^n & (p+q)^n - (p-q)^n \\ (p+q)^n - (p-q)^n & (p+q)^n + (p-q)^n \end{pmatrix}$$

PROBLÈME

Pour tout réel u, soit T_u l'application du plan, rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, dans lui-même, qui, au point $m(x\ ;\ y)$, associe le point $M(X\ ;\ Y)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} X & = & x + 2u, \\ Y & = & ux + y + u^2. \end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que T_u est bijective et déterminer l'application réciproque, T_u^{-1}.

   b. Montrer que l'ensemble, E, des applications T_u, muni de la loi de composition des applications, a une structure de groupe commutatif isomorphe au groupe additif des nombres réels.

   c. Montrer que la parabole (P) d'équation $y = \dfrac{x^2}{4}$ est globalement invariante par T_u

2. On définit, à partir de l'origine O, de proche en proche, le point M_n de la manière suivante :

$$M_1 = T_{\frac{1}{2}}(\mathrm{O}),\ M_2 = T_{\frac{1}{2^2}}\left(M_1\right),\ M_3 = T_{\frac{1}{2^3}}\left(M_2\right),\ \ldots,\ M_n = T_{\frac{1}{2^n}}\left(M_{n-1}\right).$$

a. Calculer, en fonction de n, les coordonnées x_n et y_n de M_n. Quelle est la position limite de M_n quand l'entier n augmente indéfiniment ?

b. Exprimer, en fonction de n, les coordonnées X_n et Y_n du barycentre, G_n, des points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ affectés de coefficients égaux à 1 et en déduire la position limite de G_n quand n augmente indéfiniment.

c. Calculer les coordonnées X'_n et Y'_n du point I_n, intersection des tangentes à la parabole (P) aux points M_n et M_{n+1} et montrer que, pour tout n, I_n appartient à une parabole (P$'$), dont on donnera l'équation.

3. L'image par T_u du point O, c'est-à-dire le point M de coordonnées $x = 2u$ et $y = u^2$, est animée, par rapport au repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, d'un mouvement défini, en fonction du temps t, par

$$u = \operatorname{tg} t \quad \text{et} \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$$

a. Déterminer la norme du vecteur vitesse $\overrightarrow{v(t)}$ du point M à l'instant t et indiquer, sur la trajectoire, les arcs qui correspondent à un mouvement accéléré ou retardé.

b. Montrer que, pour t appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[$, les vecteurs vitesse aux instants t et $t + \frac{\pi}{2}$ sont orthogonaux.

c. On considère le point N défini, à chaque instant t, par $\overrightarrow{\mathrm{O}N} = \overrightarrow{v(t)}$.
Montrer que l'équation cartésienne de l'ensemble $(\mathscr{H})$ des points N peut s'écrire sous la forme $2y^2 = x^3 - 2x^2$, $x \neq 0$. Construire $(\mathscr{H})$.