Durée : 4 heures

Baccalauréat C Centres d'Outremer juin 1972

EXERCICE 1

1. Étudier la variation de la fonction définie par

$$x \longmapsto f(x) = y = \mathrm{e}^x + x(\mathrm{Log}\, x - 1 - \mathrm{e}).$$

On pourra préciser le signe de $f''(x)$ pour étudier le signe de $f'(x)$.

2. Construire, dans un repère orthonormé $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, l'unité de longueur étant le centimètre, la courbe (C) représentant la fonction f.
3. Calculer l'aire du domaine limité par (C), l'axe $x'x$ et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 3$.

EXERCICE 2

Déterminer tous les entiers naturels a et b dont le P.G.C.D, (d), et le PPCM, (m), vérifient la relation

$$m - 2d = 22.$$

PROBLÈME

Partie A

1. Soit un espace vectoriel euclidien orienté $\overrightarrow{E}$ de dimension 3, muni d'une base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère l'endomorphisme, σ, défini par $\forall \overrightarrow{u}\,(x\,;\,y\,;\,z) \in \overrightarrow{E}$, $\sigma\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u'}\,\left(x'\,;\,y'\,;\,z'\right)$, tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \dfrac{1}{3}(x - 2y - 2z),\\ y' &=& \dfrac{1}{3}(-2x + y - 2z),\\ z' &=& \dfrac{1}{3}(-2x - 2y + z).\end{array}\right.$$

Calculer les coordonnées de $\sigma\left(\overrightarrow{\imath}\right)$, $\sigma\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\sigma(\overrightarrow{k})$. En déduire que σ est un endomorphisme orthogonal.

Comparer le produit vectoriel $\sigma\left(\overrightarrow{\imath}\right) \wedge \sigma\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$ au vecteur $\sigma(\overrightarrow{k})$. En déduire que σ n'est pas une rotation vectorielle.

Déterminer l'ensemble, $\overrightarrow{P}$, des éléments invariants de $\overrightarrow{E}$ par σ.

En déduire la nature de σ.

2. On considère les symétries orthogonales, σ_1 et σ_2, de $\overrightarrow{E}$, par rapport aux plans respectifs suivants :

$$P_1 \text{ d'équation } x + y + z = 0 \text{ et } P_2 \text{ d'équation } x\sqrt{6} + y - z = 0.$$

Déterminer la nature de l'endomorphisme, φ, de $\overrightarrow{E}$, défini par

$$\varphi = \sigma_2 \circ \sigma_1$$

Préciser les équations de l'ensemble, $\overrightarrow{\Delta}$, des éléments invariants par φ.

3. On appelle $\overrightarrow{\Pi}$ le plan vectoriel de $\overrightarrow{E}$ orthogonal à $\overrightarrow{\Delta}$ et $\mathcal{R}$ la restriction de φ au plan $\overrightarrow{\Pi}$.

  a. Le plan $\overrightarrow{\Pi}$ est orienté par la détermination d'un vecteur $\overrightarrow{K'}$ unitaire de $\overrightarrow{\Delta}$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{K'}$, sachant que son abscisse est choisie positive.

  Soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs respectivement orthogonaux à $\overrightarrow{P_1}$ et à $\overrightarrow{P_2}$. On pose $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) = \theta$.

  b. En déduire $\sin\theta$ à l'aide du produit vectoriel des deux vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{P_1}$ et à $\overrightarrow{P_2}$. Calculer $\cos\theta$, puis définir la mesure, θ, à $k\pi$ près, de l'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)}$ des droites, $\overrightarrow{D_1}$ et $\overrightarrow{D_2}$ intersections respectives des plans $\overrightarrow{P_1}$ et $\overrightarrow{P_2}$ avec $\overrightarrow{\Pi}$.

  En déduire que l'application $\mathcal{R}$ dans $\overrightarrow{\Pi}$ est une rotation vectorielle, dont on donnera l'angle α.

Partie B

Dans cette partie, on considère le plan affine euclidien (Π) associé au plan vectoriel euclidien $\overrightarrow{\Pi}$ de la partie A. Le plan (Π) est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Soit r la rotation plane de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$.

On appelle opérateur complexe d'une application f de (Π) dans (Π), la relation entre $z = x + \text{i}y$ affixe d'un point M de (Π), de coordonnées $(x~;~y)$, et $z' = x' + \text{i}y'$ affixe du point $M' = f(M)$, de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$.

1. Déterminer l'opérateur complexe de la rotation r.

2. Déterminer l'opérateur complexe de la similitude, S, d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$ et de rapport 2, et qui fait correspondre au point $\text{O}(0~;0)$ le point $\text{O}'(1~;~-2)$: $\text{O}' = S(\text{O})$.

3. En déduire l'opérateur complexe de l'application, S', définie par

$$S' = S \circ r.$$

Déterminer la nature de S' et ses caractéristiques géométriques à l'aide de l'opérateur de S'.