Durée : 4 heures

Baccalauréat C Paris juin 1972

EXERCICE 1

Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$$

$\left(\text{sous la forme Log}\,\dfrac{p}{q},\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}, \text{ le symbole Log désignant le logarithme népérien}\right)$.

Écrire la formule d'intégration par parties pour l'intégrale

$$\int_0^1 v(x)u'(x)\mathrm{d}x,$$

et en déduire, en prenant $u'(x) = 1$, l'intégrale

$$I = \int_0^1 \text{Log}\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\mathrm{d}x.$$

Donner une valeur décimale approchée de I, à $4 \cdot 10^{-4}$ près, sachant que 0,693 1 est une valeur décimale approchée, à $5 \cdot 10^{-5}$ près, de Log 2 et que 1,098 6 est une valeur décimale approchée, à $5 \cdot 10^{-5}$ près, de Log 3.

EXERCICE 2

On considère le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, dont les éléments sont notés $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}$, et l'équation
$(E)\quad x^2 + px + q = 0$, où les coefficients p et q appartiennent à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et où l'inconnue x est à chercher dans ce corps.
Déterminer successivement tous les couples $(p\ ;\ q)$ tels que E admette

1. la solution 6 ;
2. la solution i ;
3. la solution 2 ;
4. aucune solution.

PROBLÈME

Partie A

Le plan euclidien (P) est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, noté $\mathcal{R}$, d'axes Ox, Oy.
À l'application, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par

$$z \longmapsto Z = \text{i}z + (1-\text{i})\overline{z},$$

(où $\overline{z}$ est le conjugué de z) correspond alors la transformation T, du plan (P) qui, à m d'affixe[1] z, associe M d'affixe Z.

1. Vérifier que le milieu du segment $[mM]$ appartient à l'axe Ox et que, si m est distinct de M, la droite (mM) a une direction fixe.
   On pourra, par exemple, exprimer d'abord les coordonnées X et Y du point M en fonction des coordonnées x et y du point m (dans le repère $\mathcal{R}$).
   En déduire que la transformation T est une symétrie oblique d'axe Ox, dont on précisera la direction.

1. L'affixe d'un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ est le nombre complexe $x + \text{i}y$

2. **a.** Soit $\mathscr{R}'$ le nouveau repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}\right)$ défini dans le plan (P) par $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right) = \alpha$ (où α est un nombre réel donné) et par $\left(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Montrer que les affixes z et z' d'un même point m dans les repères respectifs $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ sont liées par la relation $z = z'(\cos\alpha + \text{i}\sin\alpha)$.

Exprimer, en fonction de z' et $\overline{z'}$, l'affixe Z' (dans le repère $\mathscr{R}'$) de l'image M de m par la transformation T.

b. On prend $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$. Montrer que $Z' = \text{i}z' - \text{i}\sqrt{2}\overline{z'}$.

Calculer alors les coordonnées X' et Y' du point M en fonction des coordonnées x' et y' du point m (dans le repère $\mathscr{R}'$).

En déduire une équation, dans $\mathscr{R}'$, de l'image $(\Gamma) = T(\gamma)$ par T du cercle (γ) de centre O et de rayon 1.

Quelle est la nature de (Γ) ?

Dessiner (γ) et (Γ) sur une même figure ; préciser quels sont leurs points communs, en s'appuyant sur la nature géométrique, trouvée au 1., de la transformation T.

Partie B

On associe à tout couple $(a, ; b)$ de nombres complexes l'application, $f_{a,\ b}$, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par

$$f_{a,\ b}(z) = az + b\overline{z}.$$

1. Mettre $f_{a,\ b}\circ f_{a,\ b})(z) - z$, c'est à-dire $f_{a,\ b}\left[f_{a,\ b}(z)\right] - z$, sous la forme $Az + B\overline{z}$, A et B étant deux constantes complexes.

Démontrer que $Az + B\overline{z}$ est nul pour tout z si, et seulement si, $A = B = 0$. (On pourra pour cela donner à z les valeurs 1 et i.)

Traduire alors par un système, S, de deux relations entre $a, b, \overline{a}$ et $\overline{b}$ la condition pour que $f_{a,\ b}$ soit involutive.

Que deviennent ces relations pour $b = 0$ (on montrera qu'il existe deux applications $f_{a,\ b}$ involutives) et pour $b \neq 0$.

Vérifier que les valeurs $a = \text{i}$ et $b = 1 - \text{i}$, utilisées dans la partie A, conviennent dans ce dernier cas.

2. Dans cette question, $f_{a,\ b}$ est supposée quelconque, involutive ou non.

On considère maintenant $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

a. Démontrer que l'application $f_{a,\ b}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est linéaire. On prend $\mathscr{B} = (1,\ \text{i})$ comme base de $\mathbb{C}$; calculer $f_{a,\ b}(1)$ et $f_{a,\ b}(\text{i})$.

b. Soit φ une application linéaire quelconque de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par sa matrice $\mathscr{M} = \begin{pmatrix} p & s \\ r & q \end{pmatrix}$ relativement à $\mathscr{B}$, p, q, r et s étant quatre réels.

Démontrer qu'il existe une application $f_{a,\ b}$ qui coïncide avec φ ; à cet effet, on calculera $\varphi(1)$ et $\varphi(\text{i})$ et l'on exprimera a et b au moyen de p, q, r et s.

c. Déduire alors du système S de relations trouvées, précédemment, un système de relations entre p, q, r et s traduisant la condition pour que φ soit involutive.

Trouver directement ces relations, en calculant $\mathscr{M}^2$, c'est-à -dire $\mathscr{M} \times \mathscr{M}$.