

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Poitiers juin 1972 ∞

EXERCICE 1

Soit  $N$  un entier naturel, tel que, en numération décimale,  $N$  s'écrive  $\overline{abcd}$  et que l'entier qui s'écrit  $\overline{bcda}$  soit divisible par 7.

1.
  - a. Montrer que, si  $a = 0$  ou  $a = 7$ , alors  $N$  est divisible par 7.
  - b. Montrer que  $10N - 3a$  est multiple de 7. En déduire que si  $N$  est divisible par 7, alors  $a = 0$  ou  $a = 7$ .
2. On suppose  $a = 7, b = d$  et  $c = 0$ . Déterminer  $N$  pour qu'il soit divisible par 3.

EXERCICE 2

Soit  $(P)$  un plan affine euclidien et soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère de  $(P)$ .

A est le point de coordonnées  $(1; 0)$ .

B est le point de coordonnées  $(-1; 0)$ .

$k_1$  et  $k_2$  sont deux réels non nuls.

Soit  $M$  un point quelconque de  $(P)$ ,  $M_1$  le transformé de  $M$  dans l'homothétie de centre A et de rapport  $k_1$  et  $M_2$  le transformé de  $M$  dans l'homothétie de centre B et de rapport  $k_2$ .

Soit alors  $M'$  le transformé de O dans la translation de vecteur  $\overrightarrow{M_1 M_2}$ .

$f$  est l'application de  $(P)$  vers  $(P)$  qui à  $M$  associe  $M'$ .

1. Chercher si  $f$  admet des points invariants.
2. Si  $k_1 \neq k_2$ , montrer que  $f$  est, soit une translation, soit une homothétie, que l'on précisera.  
Étudier le cas particulier  $k_1 = k_2$ .

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ . On prend pour unité 1 cm.

1. Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$x \mapsto y = f(x) = \frac{x^2 + 4x - 3}{|x + 6|}$$

Étudier les variations de  $f$ , puis tracer sa courbe représentative  $(\Gamma)$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

2. Discuter suivant les valeurs de  $k$ , le nombre de points d'intersections de  $(\Gamma)$  avec la droite d'équation  $y = k$ .

Dans le cas où il n'y a que deux points d'intersection  $A_k$  et  $B_k$  soit  $G_k$  le centre de gravité de  $O, A_k$  et  $B_k$  (c'est-à-dire le barycentre des trois points  $O, A_k$  et  $B_k$  affectés de coefficients égaux). Quel est l'ensemble  $(D)$  des points  $G_k$  lorsque  $k$  varie?

3. Calculer l'aire comprise entre  $(D)$ ,  $(\Gamma)$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 2$ .

On pourra mettre  $f(x)$  sous la forme

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 6}.$$

4. On pose  $Z = -\frac{z^2 + 4z - 3}{|z + 6|}$ , où  $z \in \mathbb{C}$ .

Soit  $P$  le point de coordonnées  $(x ; y)$ , d'affixe  $z$ .

- a. Quel est l'ensemble des points  $P$  tels que  $Z$  soit réel ? Calculer  $Z$  dans chacun des cas. Que remarque-t-on ?
- b. Montrer que l'ensemble des points  $P$  tels que  $Z$  soit imaginaire pur est une conique, dont on précisera la nature et, s'il y a lieu, le centre, les axes de symétrie, les sommets et les éléments caractéristiques.