Durée : 4 heures

Baccalauréat C Pondichéry juin 1972

EXERCICE 1

Soit E_n l'espace vectoriel des polynômes à une variable réelle x de degré inférieur ou égal à $n\,(n > 2)$. L'ensemble, E_2 des polynômes de la variable réelle x, de degré inférieur ou égal à 2, est un sous-espace vectoriel de E_n.
On considère l'application f de E_2 dans E_n qui, à un polynôme $P(x)$ de E_2 fait correspondre le polynôme $Q(x) = f[P(x)]$ défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = x(x-1)P'(x) - (2x+1)P(x),$$

$P'(x)$ étant le polynôme dérivé du polynôme $P(x)$.

1. $f(E_2)$ désignant l'ensemble des polynômes $Q(x)$, images par f des polynômes $P(x)$ de E_2 montrer que $f(E_2) = E_2$.
2. Montrer que f est une application linéaire et injective.

EXERCICE 2

À l'espace vectoriel $\mathcal{V}$, on associe l'espace affine E, dans lequel on choisit un point O. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ étant un vecteur donné, non nul, de $\mathcal{V}$, on appelle I le point de E tel que $\overrightarrow{\text{OI}} = \overrightarrow{u}$.
D'autre part, k et k' sont deux nombres réels non nuls et non inverses $(k \times k' \neq 1)$.
On considère alors dans E les transformations suivantes :

la translation $T_{(\overrightarrow{u})}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$,

l'homothétie $H_{(\text{O},\ k)}$ de centre O et de rapport k,

les homothéties $H_{(\text{I},\ \frac{1}{k})}$ et $H_{(\text{I},\ k')}$, de centre I et de rapports respectifs $\dfrac{1}{k}$ et k'.

Le symbole $\circ$ désignant la composition des applications, quelle est la nature des applications suivantes :

$$A_1 = H_{(\text{I},\ \frac{1}{k})} \circ T_{(\overrightarrow{u})} \circ H_{(\text{O},\ k)}$$

et

$$A_2 = H_{(\text{I},\ k')} \circ T_{(\overrightarrow{u})} \circ H_{(\text{O},\ k)}?$$

Préciser les éléments servant à les définir.

PROBLÈME

Partie A

1. Déterminer les entiers relatifs a, b, c et d, tels que, pour tout x réel, on ait

$$x^3 + ax^2 + 4x + 8 = (x+b)\left(x^2 + cx + d\right)$$

(il y a plusieurs solutions).

2. p désignant un nombre premier donné, supérieur à 2, déterminer, en fonction de p, les entiers relatifs a, b, c et d, tels que, pour tout x réel, on ait

$$x^3 + ax^2 + 4x + p = (x+b)\left(x^2 + cx + d\right).$$

Partie B

1. Soit f_1 la fonction numérique qui, à tout nombre réel x, associe le nombre

$$f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 8$$

et soit f_2 la fonction numérique qui, à tout nombre réel x, associe le nombre

$$f_2(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8.$$

Étudier les fonctions f_1 et f_2 et construire leurs courbes représentatives, (C_1) et (C_2), dans un plan (P), rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.

2. Calculer l'aire de la portion de plan située dans le deuxième quadrant ($x < 0$ et $y > 0$) et limitée par $x'x$ et les courbes (C_1) et (C_2).

Partie C

À tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ du plan (P), on associe le nombre complexe $z = x + \text{i}y$, que l'on appelle son affixe.

On considère l'application, F, du plan (P) sur lui-même qui, à tout point M d'affixe $z = x + \text{i}y$, associe le point M' d'affixe $z' = x' + \text{i}y'$, tel que

$$z' = z^3 + 2z^2 + 5z + 8.$$

1. Quels, sont les points de (P) invariants par F ?
2. Déterminer, par leurs équations, les images respectives des droites $x'x$ et $y'y$.
3. Calculer les coordonnées x' et y' du point $M' = F(M)$, en fonction des coordonnées x et y du point M.
4. Quel est l'ensemble, (H), des points M du plan complexe (P) dont les images M' ont une affixe réelle ?

   Tracer (H) dans (P) et préciser ses éléments.
5. On pose $z = 2 + 3\text{i}$. Calculer le module r' de z' et son argument θ', exprimé en degrés, avec la précision permise par les tables de logarithmes.