

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Reims juin 1972 ∞

EXERCICE 1

On pose, pour tout nombre réel x ,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{Log} |x|, & \text{pour } x \neq 0, \\ 0, & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la fonction f (en particulier, est-elle continue et dérivable en 0), et tracer dans un plan rapporté à un repère orthonormé la courbe (C) d'équation $y = f(x)$.
2. Calculer l'aire arithmétique du domaine limité par la droite d'équation $y = 0$ et la courbe (C) , d'une part, les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$, d'autre part. (On pourra intégrer par parties.)

EXERCICE 2

1. Soit A l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers relatifs tels que

$$3x - 4y = 0.$$

Déterminer A (autrement dit, résoudre l'équation).

Le sous-ensemble, A , de \mathbb{R}^2 (espace vectoriel sur \mathbb{R}) en est-il un sous-espace vectoriel?

2. Soit B l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers relatifs tels que $3x - 4y = 2$.
Déterminer B (autrement dit, résoudre l'équation).
Le sous-ensemble, B , de \mathbb{R}^2 est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 ?

PROBLÈME

1. a. On considère l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans lui-même qui, dans la base $(1; 0), (0; 1)$, est représentée par la matrice

$$t = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Quel en est le noyau? Quelle est la matrice de l'application réciproque?

- b. Soit (P) un plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{U}, \vec{V})$. Soit T la transformation de (P) qui, au point de coordonnées $(x; y)$, associe le point de coordonnées $X; Y$ telles que

$$X = x\sqrt{3} - y \quad \text{et} \quad Y = x + y\sqrt{3}.$$

Montrer que T est une similitude, dont on précisera le centre, le rapport et l'angle.

- c. Soit (E) l'ensemble des points de (P) dont les coordonnées $(X; Y)$, dans le repère \mathcal{R} , vérifient la condition

$$7X^2 + 13Y^2 - 6\sqrt{3}XY - 24X - 8\sqrt{3}Y - 16 = 0.$$

Soit (e) l'image réciproque de (E) par T . Montrer que (e) est une conique, dont on précisera la nature et le centre.

2. On pose, pour tout point m de (P), de coordonnées x et y dans le repère \mathcal{R} ,

$$\rho = Om \quad \text{et} \quad \theta = (\vec{U}, \overrightarrow{Om})$$

(de sorte que $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$).

On considère la conique de (P) d'équation

$$(x - \sqrt{3})^2 + 4y^2 = 4.$$

- a. Montrer que cette équation se met sous la forme

$$\rho = \frac{1}{2 - \sqrt{3} \cos \theta}.$$

- b. Quel est (dans le repère \mathcal{R}) le nombre complexe associé à la transformation T (c'est-à-dire le nombre complexe, α , tel que l'on ait $X + iY = \alpha(x + iy)$, pour tout couple $(x; y)$ de nombres réels) ?

Écrire sous forme trigonométrique l'affixe z d'un point m de la conique précédente. Calculer l'affixe Z de son transformé $M = T(m)$; donner la partie réelle $X = f(\theta)$ et la partie imaginaire $Y = g(\theta)$ de Z . Donner, sans aucun calcul, la relation indépendante de θ liant $X = f(\theta)$ et $Y = g(\theta)$.

3. Le plan (P) est toujours muni du repère \mathcal{R} .

- a. Quelle est la matrice, r , associée à la rotation, R , $\pi/6$ de centre O et d'angle 6° ? Quelle est la matrice, a , associée à la transformation, A , qui, au point de coordonnées (x, y) , fait correspondre le point de coordonnées $(x, 2y)$? Soit S la transformation $R \circ A \circ R^{-1}$. Calculer la matrice, s , qui lui est associée.

- b. On note t la matrice définissant la transformation T . Calculer st et ta . Quelle est la nature géométrique de l'image de la conique (e) par la transformation SoT ?

4. Soit m un mobile dont les coordonnées sont données en fonction du temps t par $x = \sqrt{3} + 2 \cos t$ et $y = \sin t$.

- a. Quelle est la trajectoire de m ? Calculer, à l'instant T , les vecteurs vitesse et accélération de m .
- b. En quels points de la trajectoire le mobile a-t-il un vecteur accélération orthogonal au vecteur vitesse ?