

Durée : 4 heures

❧ Baccalauréat C Rennes juin 1972 ❧

EXERCICE 1

1. Résoudre l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad e^{\frac{1}{x}} - 2 = 0$$

2. x_0 étant la solution de l'équation précédente, on désigne par \mathbb{R}_1 l'ensemble des nombres réels positifs, dont on a exclu le nombre x_0 . On considère alors la fonction f définie sur \mathbb{R}_1 de la façon suivante :

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \text{ et} \\ f(x) &= \frac{2}{e^{\frac{1}{x}} - 2}, \text{ pour tout } x \text{ non nul de } \mathbb{R}_1, \end{cases}$$

$e^{\frac{1}{x}}$ désignant l'exponentielle de $\frac{1}{x}$.

Étudier les variations de la fonction f . La fonction f est-elle continue à droite du point 0 ?

Construire la courbe représentative (C) de la fonction f dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On précisera la demi-tangente à la courbe (C) pour $x = 0$.

EXERCICE 2

En utilisant la théorie des congruences ou l'anneau $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, calculer les restes des divisions euclidiennes par 7 des puissances successives de 5 :

$$5^0, \quad 5^1, \quad 5^2, \quad \dots, \quad 5^n, \quad \dots$$

avec $n \in \mathbb{N}$.

Quel est le reste de la division euclidienne de l'entier naturel 1972^{57} par 7.

Déterminer l'ensemble des naturels n tels que 1972^n soit congru à 4 modulo 7 ?

PROBLÈME

On donne un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v})

de sens direct d'axes $\vec{x'Ox}, \vec{y'Oy}$.

À tout point M de ce plan, de coordonnées x, y , on associe le nombre complexe $z = x + iy$ appelé affixe de ce point.

Dans tout le problème, Q désigne un point variable de l'axe $x'x$, de coordonnées $(q; 0)$, P un point variable de l'axe $y'y$, de coordonnées $(0; p)$ et M un point variable, de coordonnées $(x; y)$.

1. Dans cette première partie le triplet des points P, Q et M vérifie la propriété \mathcal{P}_1 :

le triangle (PMQ) est équilatéral avec $(\vec{MP}, \vec{MQ}) = +\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$; autrement dit, Q est le transformé de P dans une rotation de centre M d'angle $+\frac{\pi}{3}$.

- a. Quelle relation nécessaire et suffisante doivent vérifier les affixes des points M, P et Q pour que la propriété \mathcal{P}_1 soit satisfaite ? Montrer que cette relation est équivalente à

$$p = x\sqrt{3} - y \quad \text{et} \quad q = -x + y\sqrt{3}.$$

- b. On suppose, en outre, que le segment $[PQ]$ a pour longueur $\sqrt{2}$ (on a donc $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{2}$).

Quel est alors l'ensemble, (E) , des positions de M ? Préciser les éléments de symétrie de (E) .

Pour déterminer l'équation réduite de (E) , on remplace le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) par le repère (O, \vec{u}', \vec{v}') défini de la façon suivante :

$$\vec{u}' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{u} + \vec{v}) \quad \text{et} \quad \vec{v}' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{u} - \vec{v}).$$

un point M ayant comme coordonnées x et y dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) , x' et y' dans le repère (O, \vec{u}', \vec{v}') , établir les formules qui expriment x et y en fonction de x' et de y' . En déduire l'équation de (E) dans le deuxième repère. Préciser la nature de la courbe (E) ; la construire.

2. Dans cette deuxième partie, le triplet de points (P, Q, M) vérifie la propriété \mathcal{P}_2 :

il existe une rotation de centre M dans laquelle le point P a pour image le point Q .

On pose

$$\widehat{(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ})} = \theta \pmod{2\pi},$$

avec $\theta \in]-\pi ; \pi] - \left\{-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right\}$.

- a. On suppose que θ est fixé. Montrer par un raisonnement géométrique que, à tout point M du plan, est associé un, et un seul, couple (P, Q) donc un, et un seul, point Q , tel que la propriété \mathcal{P}_2 soit satisfaite.

On définit ainsi une application f_θ de l'ensemble des points M du plan dans l'ensemble des points Q de la droite $x'x$. Définir analytiquement cette application en exprimant q au moyen de x et de y . Montrer que f_θ est une application affine, surjective si $\theta \neq 0$.

Quel est le noyau de l'application linéaire φ_θ associée à f_θ ? Retrouver ce noyau par un raisonnement géométrique.

- b. On suppose maintenant que l'on fixe les coordonnées x_0 et y_0 du point M , θ étant variable. Quelle relation nécessaire et suffisante les normes des vecteurs \overrightarrow{MP} et \overrightarrow{MQ} doivent-elles vérifier pour que la propriété \mathcal{P}_2 soit satisfaite ?

Traduire analytiquement cette relation. En déduire l'ensemble, (F) , des milieux du segment $[PQ]$. Préciser la nature de cet ensemble (F) suivant la position du point donné M dans le plan.