

Durée : 4 heures

⌘ Baccalauréat C Rouen juin 1972 ⌘

EXERCICE 1

Soit la suite des n nombres complexes,

$$u_1, \quad u_2, \quad \dots, \quad u_p, \quad \dots, \quad u_n$$

définie par

$$u_1 = 1 - i \quad \text{et} \quad \forall p \in [2 ; n], \quad u_p = u_{p-1} \cdot j$$

$$\text{avec } j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

1. Vérifier que $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.
2. Montrer que, pour tout entier p tel que $4 \leq p \leq n$, on a $u_p = u_{p-3}$.
Construire les images des nombres u_p .
3. En déduire, suivant la forme de n , la valeur de

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_p,$$

puis calculer les expressions

$$\sigma_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \cos \left(-\frac{\pi}{4} + 2p\frac{\pi}{8} \right)$$
$$\text{et } \sigma'_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \sin \left(-\frac{\pi}{4} + 2p\frac{\pi}{8} \right)$$

EXERCICE 2

Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par les formules

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x) &= x \operatorname{Log} |x| \text{ pour } x \neq 0, \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue pour la valeur 0 de la variable ?
Est-elle dérivable en ce point ?
Justifier les réponses.
2. Déterminer la fonction dérivée f' . Étudier la variation de f ; en donner une représentation graphique cartésienne, dans un repère orthonormé $(x'Ox, y'Oy)$.
3. Au moyen d'une intégration par parties trouver les primitives de la fonction f .
Calculer l'aire du domaine limité par la courbe représentative de f , l'axe $x'Ox$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

PROBLÈME

Dans un plan euclidien affine, (P), rapporté à un repère cartésien orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points A, B, C, D et E, tels que

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i} - \vec{j}, \quad \overrightarrow{AB} = 2\vec{j}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} = -\vec{i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\vec{j}.$$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction numérique, f , de la variable réelle, x , telle que

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{2(x + 1)}.$$

Soit (Φ) la courbe représentative de f dans (P) .

2. Tracer cette courbe en précisant, en particulier, ses asymptotes et son centre de symétrie.
3. Soit s la symétrie par rapport à la droite (ED) et de direction \overrightarrow{EC} .
On pose $s(M) = M'$. Calculer le couple $(x' ; y')$ des coordonnées du point M' , en fonction de celui, $(x ; y)$, des coordonnées de M .
Quelle est l'équation de la courbe, (Φ_1) transformée de (Φ) par s ? Tracer cette courbe (Φ_1) sur la même figure que (Φ) .
4. Soit g l'application affine telle que

$$g(O) = E, \quad g(A) = C \quad \text{et} \quad g(B) = D.$$

Quelle est, dans la base $(\overrightarrow{i} ; \overrightarrow{j})$, la matrice de l'application linéaire, γ , associée à g ?

Démontrer que g est bijective.

5. Étant donné le point M de coordonnées $(x ; y)$, on pose $M'' = g(M)$. Calculer, en fonction de x et de y , le couple $(x'' ; y'')$ des coordonnées du point M'' .
6. Quelles sont les équations cartésiennes des courbes (ψ) et (ψ_1) transformées respectives de (Φ) et de (Φ_1) par l'application, g^{-1} , réciproque de g ?
On donnera, de ces courbes, des définitions géométriques simples.
7. Donner une définition géométrique simple de l'application composée $g^{-1} \circ s \circ g$.