

Durée : 4 heures

⌘ Baccalauréat C Sud Vietnam juin 1972 ⌘

EXERCICE 1

Le plan affine euclidien, E , étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on associe à tout point M , de coordonnées $(x; y)$, son affixe $z = x + iy$.

Soit T la transformation ponctuelle de E qui, à tout point $M(x; y)$ d'affixe z , fait correspondre le point $M'(x'; y')$ d'affixe z' définie par

$$z' = (1 - i)z + 2 - i.$$

1. Préciser la nature géométrique de la transformation T ainsi que les éléments géométriques servant à la définir.
2. Quelle est l'image par la transformation T du cercle (C) de centre O et de rayon 1 ?

EXERCICE 2

Si d est le PGCD des deux entiers naturels a et b , quel est le PGCD des entiers

$$a' = 13a + 5b \quad \text{et} \quad b' = 5a + 2b?$$

PROBLÈME

À chaque entier naturel n , non nul, on associe la fonction f_n qui, à tout réel x strictement positif, associe le nombre réel

$$y = f_n(x) = \frac{x^n + 1}{4x^2}.$$

1. Étudier les fonctions f_1 et f_2 $\left[f_1(x) = \frac{x+1}{4x^2} \text{ et } f_2(x) = \frac{x^2+1}{4x^2} \right]$ et construire leurs courbes représentatives (C_1) et (C_2) dans un plan (P) , rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. Pour $n > 2$, étudier la fonction f_n :
 - a. sa continuité,
 - b. son sens de variation ; on désignera par x_n la valeur de x pour laquelle f_n présente un minimum,
 - c. les valeurs limites $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

On étudiera, suivant la valeur de l'entier n , l'existence d'asymptotes à la courbe (C_n) .

Construire la courbe (C_3) représentative de la fonction f_3 dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
3. Dans cette question, on désire encadrer le nombre x_n .
 - a. Suivant la valeur de l'entier n strictement supérieur à 2, comparer les nombres x_n et 1.
 - b. Démontrer que la différence $x_n - \frac{1}{2}$ a même signe que la différence $x_n^n - \frac{1}{2^n}$.

On considère la fonction, φ , qui, à tout nombre réel x strictement positif, associe le nombre

$$\varphi(x) = 2^{x+1} - x + 2.$$

Étudier les variations de la fonction φ et montrer qu'elle est strictement positive, quel que soit le nombre réel x strictement positif.

Montrer que, pour tout entier n strictement supérieur à 4, le réel x_n appartient à l'intervalle $\left] \frac{1}{2} ; 1 \right[$.

4. Étudier l'intersection des courbes (C_n) et $(C_{n'})$, pour deux entiers distincts n et n' . En déduire que toutes les courbes (C_n) passent par un même point, B, dont on précisera les coordonnées.

On suppose $n < n'$; comparer, suivant les valeurs de x strictement positives, les nombres $f_n(x)$ et $f_{n'}(x)$.

En déduire la position relative des courbes (C_n) et $(C_{n'})$.

5. Construire dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative, (C) , de la fonction qui, à tout réel x strictement positif, associe le nombre $y = \frac{1}{4x^2}$.

n étant un entier donné, montrer que la courbe (C) est située en-dessous de la courbe (C_n) et calculer l'aire $\mathcal{A}(t)$ de la partie du plan (P) qui est limitée par les courbes (C) et (C_n) et par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = t$. Étudier la limite de $\mathcal{A}(t)$ lorsque t tend vers 0.