

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amiens juin 1976 ∞

EXERCICE 1

points

Soit f l'application de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 \text{Log } x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(Log désigne la fonction logarithme népérien).

1. Étudier la continuité de f .
2. Étudier la dérivabilité de f .
3. Étudier le sens de variation de f et tracer sa courbe représentative (\mathcal{C}) dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
4. Calculer l'aire \mathcal{A}_α du domaine plan limité par la courbe (\mathcal{C}) et les droites d'équations respectives $y = -1$, $x = 0$ et $x = 1$ avec $0 < \alpha < 1$.
Quelle est la limite de \mathcal{A}_α lorsque α tend vers 0?

EXERCICE 2

points

Un paquet de treize cartes à jouer comprend six as, trois rois et quatre dames. Les valeurs des cartes sont les suivantes :

- un as quelconque : + 5
- un roi quelconque : + 2
- une dame quelconque : - 1

L'épreuve consiste à tirer simultanément deux cartes de ce jeu. On suppose les tirages équiprobables.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles?
2. On considère la variable aléatoire X qui à tout tirage fait correspondre la somme des valeurs des cartes tirées.
 - a. Quelle est la loi de probabilité de X ?
 - b. Calculer son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.

PROBLÈME

points

On rappelle que \mathbb{R}^2 muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.

On note \star la loi définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, \forall (a'; b') \in \mathbb{R}^2, (a; b) \star (a'; b') = (aa' + \alpha bb'; ab' + a'b)$$

où α est un réel donné.

On pose $\vec{\gamma} = (1; 0)$, $\vec{\omega} = (0; 1)$ et $\vec{0} = (0; 0)$.

\mathbb{N}^* désigne $\mathbb{N} - \{0\}$.

Partie A

1. Montrer que, pour tout α réel, $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ est un anneau commutatif unitaire.
2. Préciser l'ensemble des réels α tels que pour chacun d'eux $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ soit un corps.

3. Soit \mathcal{M}_α l'ensemble des matrices à coefficients réels de la forme

$$\begin{pmatrix} a & \alpha b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \text{ est un réel donné.}$$

On note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $(\mathcal{M}_\alpha, +, \times)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}^2, +, \star)$.

4. Dans cette question, on considère le cas $\alpha = 0$

- a. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. Former A^2 .

Montrer que : $A^2 - 2aA + a^2I = O$.

Pour tout n , exprimer A^n en fonction de a , b et n .

Montrer qu'il existe $(a; b) \neq (0; 0)$ tel que $A^2 = O$. Que confirme ce dernier résultat ?

- b. Soit $u = (a; b)$. On pose $u^1 = u$ et pour tout entier naturel

$n \geq 2$, $u^n = u^{n-1} \star u$. Utiliser a. pour exprimer u en fonction de a , b et n .

- c. Résoudre dans $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ les équations :

$$u^2 + 2u = \bar{0}$$

$$u^2 + u + \bar{\gamma} = \bar{0}$$

- d. Résoudre dans $(\mathcal{M}_0, +, \times)$ les équations :

$$A^2 + 2A = O$$

$$A^2 + A + I = O$$

5. On suppose $\alpha = \frac{4}{9}$. Déterminer alors les éléments $(a; b)$ de $\mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$ pour lesquels l'équation :

$$(a; b) \star (x; y) = 0$$

admet, dans \mathbb{R}^2 , des solutions $(x; y)$ différentes de $\bar{0}$.

Partie B

Soit \mathcal{E} un espace vectoriel euclidien de dimension 2 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. On appelle F_α l'ensemble des endomorphismes de \mathcal{E} dont la matrice dans \mathcal{B} appartient à \mathcal{M}_α , α étant un réel donné.

1. Dans cette question on considère le cas où $\alpha = 1$.

- a. Déterminer l'ensemble P des éléments de F_1 qui sont des projections vectorielles de \mathcal{E} sur des droites vectorielles. Caractériser avec précision chaque élément de P . Déterminer l'ensemble J des éléments de F_1 qui sont des involutions de \mathcal{E} . Caractériser avec précision chaque élément de J .

- b. Montrer que l'ensemble J muni de la loi \circ de composition des applications est un groupe commutatif. (On pourra établir la table de Pythagore de la loi).

2. On considère maintenant le cas $\alpha = -1$

- a. Quels sont les éléments de F_{-1} tels que $a^2 + b^2 = 1$?
- b. Soit φ l'élément de F_{-1} défini par $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On désigne par E un espace affine associé à l'espace vectoriel \mathcal{E} , et par (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé de E.
Soit f l'application affine de E dans E associée à φ et telle que $f(O) = O$ et (Γ) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) vérifient l'équation :

$$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0$$

Déterminer une équation de $f(\Gamma)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

En déduire la nature de $f(\Gamma)$ et représenter graphiquement cet ensemble.

- c. En utilisant la définition bifocale d'une conique à centre, montrer que (Γ) est une ellipse que l'on tracera dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- d. On considère dans le plan E rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) le mouvement du point m de coordonnées $(x; y)$ définies par l'application suivante de \mathbb{R} vers E :

$$\begin{cases} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(2\cos 2t + \sin 2t) \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2t - 2\cos 2t) \end{cases}$$

Montrer que le mouvement est périodique.

Trouver la relation, indépendante de t , liant x et y . Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?

Préciser sur une période les intervalles de temps où le mouvement est accéléré ou retardé.