Baccalauréat C Amiens septembre 1976

EXERCICE 1

1. Résoudre l'équation $X^2 + X = 0$
   a. dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$;
   b. dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, on considère l'équation $X^2 + X - \dot{m} = \dot{0}$.
   Discuter suivant les valeurs de $\dot{m}$, élément de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, le nombre de solutions de cette équation.

EXERCICE 2

Soit E un espace vectoriel euclidien de base orthonormée $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ directe.

Soit $\overrightarrow{u} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}\right)$, $\quad \overrightarrow{v} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}\right)$.

1. Déterminer la nature de l'isomètrie vectorielle φ telle que $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ ait pour image $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
   En déduire que $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est une base orthonormée directe,
2. On considère la rotation vectorielle r d'axe Δ, orienté par $\overrightarrow{v}$ et d'angle de mesure θ.
   a. Déterminer $r\left(\overrightarrow{\imath}\right)$, $r\left(\overrightarrow{u}\right)$, $r\left(\overrightarrow{v}\right)$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
   b. Déterminer $r\left(\overrightarrow{\imath}\right)$, $r\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$, $r\left(\overrightarrow{k}\right)$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ puis dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
   c. En déduire les composantes $(x' ; y' ; z')$ de $\overrightarrow{w'} = r\left(\overrightarrow{w}\right)$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ en fonction des composantes $(x ; y ; z)$ de $\overrightarrow{w}$ dans cette même base.

PROBLÈME

Dans tout le problème, le plan euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Le plan vectoriel euclidien de base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ est désigné par π.

Les parties A et B sont totalement indépendantes

Une table de valeurs de la fonction exponentielle de base e est donnée en annexe pour faciliter les calculs

Partie A

Soit f l'application de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0 \\ f(x) & = & \dfrac{x^2}{x-1}\text{e}^{\frac{1}{x}} \quad \text{si } x \text{ est distinct de 0 et 1} \end{array}\right.$$

1. Étudier si les restrictions de f aux intervalles $]-\infty ; 0[$, $]0 ; 1[$, $]1 ; +\infty[$ admettent des limites aux bornes de ces intervalles.
   Etudier la variation de f (on pourra utiliser le tableau annexe pour calculer des valeurs approchées de f aux points où la fonction dérivée s'annule).

2. Montrer que, pour tout réel u non nul, on a : $e^u - 1 > u$.

   En déduire le signe de $\dfrac{e^u - 1}{u}$ sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\,0[$, $]0\,;\,+\infty[$.

3. Soient les applications g et h de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(x) & = & f(x) - xe^{\frac{1}{x}} \\ h(x) & = & x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \end{array}\right.$$

   a. Montrer que les fonctions g, h, $g + h$ admettent des limites que l'on calculera quand x tend vers $+\infty$ ou quand x tend vers $-\infty$. En déduire que la courbe C représentative de f dans le repère $\left(O,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ admet la droite Δ, dont une équation est $y = x + 2$ comme asymptote.

   b. Montrer les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{llll} (\forall x \in]1\,;\,+\infty[), & g(x) > 1 & \text{et} & h(x) > 1 \\ (\forall x \in]-\infty\,;\,0[), & g(x) < 1 & \text{et} & h(x) < 1 \end{array}$$

   En déduire la position de C par rapport à Δ.

4. Tracer la courbe C. Préciser la tangente à C au point A d'abscisse 0,5.

Partie B

a est un réel donné.
K_a, T_a désignent des applications affines de P dans p.
k_a, t_a sont les endomorphismes de π associés respectivement aux applications affines précédentes.
L'application K_a fait correspondre à tout point $M(x\,;\,y)$ de P le point $M'\left(x'\,;\,y'\right)$ de P tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -x + a \\ y' & = & -ax + (3 - a)y + 2 \end{array}\right.$$

S_a est la symétrie centrale de P, de centre I_a point défini ci-dessous en B 1.

1. Montrer que l'application K_a admet toujours au moins un point invariant.
   Quel est l'ensemble E des valeurs de a pour lesquelles K admet un seul point invariant I_a ?
2. On suppose $a \in$ E. Montrer que $K_a \circ Sa = S_a \circ K_a$. On désignera par T_a la transformation composée précédente.
   Dans le cas $a = 3$, déterminer $t_0\,(i)$, $t_0\left(j\right)$. Exprimer, dans le repère $\left(\text{I}_0,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ les coordonnées $(X_0\,;\,Y_0)$ de $M_0 = T_0(M)$ en fonction des coordonnées $\left(x_0\,;\,y_0\right)$ de M dans ce même repère. En déduire une construction simple de l'image M' de M par K_0.
3. On suppose $a = 3$. Montrer que T_3 est une projection que l'on définira avec précision.
4. On suppose $a = 2$. K_2 est alors une symétrie par rapport à une droite D suivant une direction S. Préciser la droite D et la direction S.
   m étant un réel donné, déterminer $k_2\left(\overrightarrow{\imath} + m\overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie C

Soit Γ l'ensemble des transformés des points de C par la symétrie K_2.

1. Montrer que Γ est la courbe représentative de l'application ψ de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\psi(X) = 2X - 2 + f(2 - X)$$

2. Soit m le coefficient directeur de la tangente à C en l'un de ses points $M(x~;~f(x))$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. Quel est le coefficient directeur de la tangente à Γ en $M' = K_2(M)$?

3. Préciser les asymptotes de Γ. Sans étudier la variation de ψ, tracer la courbe Γ ; Γ et C seront dessinées dans le même repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Annexe. Tableau donnant des valeurs approchées de e^x et e^{-x} pour différentes valeurs de x.

x	e^x	e^{-x}
0,100	1,105 2	0,904 8
0,200	1,221 4	0,818 7
0,250	1,284 0	0,778 8
0,382	1,465 2	0,682 5
0,500	1,648 7	0,606 5
1,000	2,718 3	0,367 9
2,000	7,389 1	0,135 3
2,500	12,182	0,0821
2,618	13,962	0,0716