Baccalauréat C Besançon[1] septembre 1976

EXERCICE 1

Déterminer les paires $\{a\ ;\ b\}$ d'entiers naturels tels que $2m+7d=111$, m désignant le plus petit commun multiple, d désignant le plus grand commun diviseur de a et de b.

EXERCICE 2

f est la fonction définie par :

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\star} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \end{array}\right.$$

1. Étudier les variations de cette fonction.
2. Déduire de la question précédente l'étude des variations des fonctions :
   a. $g : x \in [0\ ;\ 2\pi[, \quad g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\cos x}}{\cos x}$;
   b. $h : x \in \mathbb{R}_+^{\star}, \quad h(x) = \dfrac{x}{\operatorname{Log} x}$.
   (Log désigne la fonction logarithme népérien.)

PROBLÈME

Soit (P) un plan affine euclidien orienté, $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ un repère orthonormé direct de (P). Pour tout couple $(x\ ;\ y)$ de nombres réels, le nombre complexe $x+\mathrm{i}y$ est appelé affixe du point M de (P) de coordonnées x et y dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$.
On appelle A le point d'affixe 2 et B le point d'affixe i.
Soit F l'application de (P) dans (P) qui associe à tout point M d'affixe z le point $M' = F(M)$ d'affixe z' tel que

$$z' = 2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{z} - 2\right)$$

($\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de z).

Partie A

1. Déterminer le nombre réel strictement positif k et la droite (Δ) passant par A tels que F soit égale à la composée commutative de l'homothétie H de centre A, de rapport k et de la symétrie orthogonale S_{Δ} par rapport à la droite (Δ).
2. **a.** Quelles sont les droites globalement invariantes par F ?
   b. Quelles sont les droites orthogonales à leurs images par F ?
3. Soit $(y'y)$ la droite contenant le point O, de vecteur directeur $\overrightarrow{e_2}$.
   a. Quel est l'ensemble des affixes des points de $(y'y)$; en déduire l'image de $(y'y)$ par F.
   b. En utilisant les nombres complexes, démontrer qu'il existe une similitude directe et une seule $\sum$ telle que pour tout point M de $(y'y)$ on ait :

$$\sum(M) = F(M)$$

1. Nancy - Reims et Strasbourg

Si z est l'affixe d'un point quelconque M de (P), quelle est l'affixe du point $\sum(M)$? Donner les coordonnées du centre C de la similitude $\sum$, ainsi que le rapport et l'angle de $\sum$.

Démontrer que, pour tout point M de $(y'y)$, le cercle de diamètre MM' $(M' = F(M)$ contient les points B et C.

4. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $b < a$ et (Γ) la courbe d'équation $\dfrac{(x-2)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

a. Déterminer la nature de (Γ) et ses éléments de symétrie.

b. Déterminer une équation cartésienne de (Γ') image de (Γ) par F. Quelle est la nature de (Γ') ?

Préciser ses éléments de symétrie.

c. Tracer (Γ) et $(\Gamma()$ lorsque $a = 2$ et $b = 1$.

Partie B

On pose $F^1 = F$, $F^2 = F \circ F$ et pour tout entier naturel n non nul, on pose $F^{n+1} = F \circ F^n$.

1. Déterminer l'ensemble E des valeurs de l'entier naturel non nul n pour lesquelles F^n est une homothétie. Pour tout élément n de E, déterminer le centre et le rapport de l'homothétie F^n.

Montrer que, pour toute valeur n de $\mathbb{N}-E$, F est la composée d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale que l'on précisera.

2. O étant l'origine du repère, on pose $O_1 = F(O)$ et pour tout entier naturel non nul n, on pose $O_{n+1} = F(O_n)$.

Montrer que, pour tout entier naturel non nul, le point O_n appartient à la réunion de deux demi-droites d'origine A.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on appelle z_n l'affixe du point O_n et on pose $u_n = z_n - 2$ et $v_n = |u_n|$.

Calculer u_n en fonction de n et du rapport k de l'homothétie H, montrer que v_n est terme général d'une suite géométrique.

On pose $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$. Calculer σ_n et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sigma_n$.

Partie C

En utilisant les nombres complexes, déterminer l'ensemble $\mathcal{H}$ des similitudes directes S permutant avec F (S vérifie $S \circ F = F \circ S$).

Quelle est la structure de $\mathcal{H}$ munie de la loi notée $\circ$ de composition des applications ?