Durée : 4 heures

Baccalauréat C Bordeaux juin 1976

EXERCICE 1 **points**

Rechercher tous les couples $(z_1\ ;\ z_2)$ de nombres complexes satisfaisant aux conditions :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_1z_2 & = & \dfrac{1}{2}\\ z_1+2z_2 & = & \sqrt{3}\end{array}\right.$$

Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres ainsi obtenus.

EXERCICE 2 **points**

1. **a.** Montrer que la fonction numérique :

$$f\ :\ x \longmapsto x\text{Log}\,x - x$$

est dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et donner l'expression de $f'(x)$.

b. Soit t un élément quelconque de l'intervalle réel $]0\,;\ 1]$. Montrer que la fonction : $x \longmapsto \text{Log}\,x$ est intégrable sur $[t\ ;\ 1]$. Calculer :

$$I(t) = \int_t^1 (\text{Log}\,x)\,\text{d}x.$$

Montrer que la fonction : $t \longmapsto I(t)$ admet une limite finie quand t tend vers zéro par valeurs positives.

Que vaut cette limite ?

2. Soit T un élément quelconque de l'intervalle réel $[1\ ;\ +\infty[$. Montrer que la fonction : $x \longmapsto \dfrac{\text{Log}\,x}{x^2}$ est intégrable sur $[1\ ;\ T]$. Calculer :

$$J(T) = \int_T^1 \frac{\text{Log}\,x}{x^2}\,\text{d}x.$$

(On peut faire une intégration par parties).

Montrer que la fonction : $T \longmapsto J(T)$ admet une limite finie quand T tend vers $+\infty$, que vaut cette limite ?

PROBLÈME **points**

Partie A

Soit a un nombre réel donné non nul. Soit A l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables en tout point, et satisfaisant pour tout $t \in \mathbb{R}$ à la condition :

$$\varphi'(t) = a\varphi(t)$$

1. Montrer que la fonction $\varphi_a\ :\ t \longmapsto \text{e}^{at}$ appartient à A.
2. Soit φ un élément quelconque de A. Quelle est l'application dérivée de la fonction $h = \dfrac{\varphi}{\varphi_a}$?

   En déduire que φ est de la forme $k\varphi_a$ où k est un nombre réel.

Partie B

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension trois. Soit B = $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ une base fixée de E. Soit u l'application linéaire de E dans E telle que :

$$u\left(\vec{\imath}\right) = -\sqrt{2}\vec{\imath} + \vec{k}, \quad u\left(\vec{\jmath}\right) = \sqrt{2}\vec{\jmath} + \vec{k}, \quad u\left(\vec{k}\right) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$$

1. Soit $\vec{V}$ un vecteur quelconque de E. Soit x_1 ; x_2 ; x_3 les coordonnées de $\vec{V}$ dans la base B. Quelles sont les coordonnées dans B du vecteur $u\left(\vec{V}\right)$?
2. Montrer que le noyau de u, noté ker(u), est le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur

$$\overrightarrow{V_1} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \sqrt{2}\vec{k}$$

3. Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{V}$ de E tels que $u(\vec{V}) = 2\vec{V}$ est le sous-espace vectoriel de E de dimension 1, engendré par le vecteur

$$\overrightarrow{V_2} = \left(2-\sqrt{2}\right)\vec{\imath} + \left(2+\sqrt{2}\right)\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

4. Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{V}$ de E tels que $u(\vec{V}) = -2\vec{V}$ est le sous-espace vectoriel de E de dimension 1, engendré par le vecteur

$$\overrightarrow{V_3} = \left(-2-\sqrt{2}\right)\vec{\imath} + \left(-2+\sqrt{2}\right)\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

5. On note Im(u) l'image de E par u. Montrer que $\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}\right)$ est une base de E. Montrer que $\left(\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}\right)$ est une base de Im(u). En déduire que Ker(u) et Im(u) sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Dans C et D, en plus des hypothèses de B, on suppose que E est un espace vectoriel euclidien, et que B = $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ en est une base orthonormée.

Partie C

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}$ sont deux à deux orthogonaux.
2. En utilisant la base $\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}\right)$, donner une interprétation géométrique de l'application linéaire u.

Partie D

On appelle $\mathscr{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions vectorielles définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans E. Si $\vec{\mathrm{F}}$ est un élément de $\mathscr{F}$, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\vec{\mathrm{F}}(t)$ est donc un vecteur de E. On note $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ les coordonnées de $\vec{\mathrm{F}}(t)$ dans la base B, et $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ les coordonnées de $\vec{\mathrm{F}}(t)$ dans la base $\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}\right)$.

On rappelle que dire que la fonction vectorielle $\vec{\mathrm{F}}(t)$ est dérivable en un point $t_0 \in \mathbb{R}$ revient à dire que chaque fonction numérique f_1, f_2, f_3 est dérivable en t_0, ou encore que chaque fonction numérique $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ est dérivable en t_0. Et on a alors :

$$F'(t_0) = f_1'(t_0)\vec{\imath} + f_2'(t_0)\vec{\jmath} + f_3'(t_0)\vec{k} = \varphi_1'(t_0)\overrightarrow{V_1} + \varphi_2'(t_0)\overrightarrow{V_2} + \varphi_3'(t_0)\overrightarrow{V_3}$$

1. Soit $\mathscr{F}_u$ l'ensemble de toutes les fonctions vectorielles $\vec{\mathrm{F}} \in \mathscr{F}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier et vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}$ la relation $(\star)$:

$$\vec{\mathrm{F}}'(t) = u\left[\vec{\mathrm{F}}(t)\right] \qquad (\star)$$

a. Soit $\overrightarrow{\mathrm{F}} \in \mathscr{F}_u$. Comment se traduit la relation $(\star)$ sur les coordonnées $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ de $\overrightarrow{\mathrm{F}}(t)$ dans la base $\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}\right)$?

b. En déduire, en utilisant A, la forme des fonctions numériques φ_1, φ_2, φ_3.

2. Rechercher toutes les fonctions numériques f_1, f_2, f_3 définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\forall t \in R \quad \left\{\begin{array}{rcr} f_1'(t) & = & -\sqrt{2}f_1(t) + f_3(t)\\ f_2'(t) & = & \sqrt{2}f_2(t) + f_3(t)\\ f_3'(t) & = & f_1(t) + f_3(t)\end{array}\right.$$

et $f_1(0) = 5$, $f_2(0) = 3$, $f_3(0) = \sqrt{2}$