Durée : 4 heures

Baccalauréat C Caen septembre 1975

EXERCICE 1 **points**

Déterminer les couples d'entiers naturels, non nuls, $(a~;~b)$ tels que leur p.g.c.d. et leur p.p.c.m., notés respectivement d et m vérifient la relation :

$$2m+3d=78$$

EXERCICE 2 **points**

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x, définie par :

$$f(x)=x-\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

(Log désigne la fonction logarithme népérien).

1. Étudier ses variations, construire sa courbe représentative C dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On étudiera la position de C par rapport à son asymptote oblique Δ.
2. **a.** Au moyen d'une intégration par parties, calculer :

$$\int_1^{\alpha}\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)\,\text{d}x.$$

   α étant un réel strictement positif.

   b. Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe C, la droite Δ, et les droites d'équations : $x=1$ et $x=\alpha$, α étant un réel donné strictement positif et inférieur à 1.

   c. Chercher si $\mathcal{A}(\alpha)$ admet une limite quand α tend vers 0, et calculer cette limite.

PROBLÈME **points**

On considère un plan vectoriel euclidien orienté $\mathcal{P}$, de base orthonormée directe $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Soit f et g les endomorphismes de $\mathcal{P}$ de matrices respectives dans la base $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$:

$$F=\begin{pmatrix}\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta\\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta\end{pmatrix}$$

$$\text{et } G=\text{I}-F.$$

I étant la matrice unité : $\text{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et θ un nombre réel de l'intervalle $\left]0~;~\frac{\pi}{4}\right[$.

On appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $\alpha F+\beta G$ lorsque α et β décrivent $\mathbb{R}$. On rappelle que l'ensemble $\mathcal{M}$, des matrices carrées 2×2 à termes réels possède une structure d'anneau unitaire non commutatif et une structure d'espace vectoriel sur le corps des réels.

1. **a.** Calculer F^2, $F\times G$, $G\times F$, G^2.

b. Démontrer que le produit de deux matrices de $\mathscr{A}$, est une matrice de $\mathscr{A}$.

c. $(\mathscr{A}, +, \times)$ est-il un anneau unitaire ? est-il un corps ?

2. **a.** Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des vecteurs invariants par f et le noyau $\mathscr{N}$ de f. cose

b. Soit $\overrightarrow{u}\,(\cos\theta\,;\,\sin\theta)$ et $\overrightarrow{u'}\,(-\sin\theta\,;\,\cos\theta)$. Démontrer que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right)$ est une base orthonormée directe du plan vectoriel $\mathscr{P}$. Écrire la matrice de f dans cette base. Quelle est la nature de f ?

c. Calculer $g\left(\overrightarrow{u}\right)$ et $g\left(\overrightarrow{u'}\right)$. En déduire la nature de l'endomorphisme g et écrire sa matrice dans la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right)$.

3. On considère l'endomosphisme $h = \alpha f + \beta g$ du plan vectoriel $\mathscr{P}$.

a. Écrire sa matrice H dans la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right)$.

b. Pour quelles valeurs de α et β l'endomorphisme h est-il une isométrie vectorielle ? Caractériser par son angle ou par son ensemble de vecteurs invariants chacune des isométries vectorielles ainsi obtenues.

4. Soit π un plan affine euclidien associé à $\mathscr{P}$ et de repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. On appelle σ l'application de π dans π qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 2(\cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta)\overline{z}$, $\overline{z}$ étant le nombre complexe conjugué de z.

a. Démontrer que σ est une similitude indirecte, déterminer son rapport et son centre.

b. Démontrer que l'application linéaire s associée à σ a une matrice S de la forme $\alpha F + \beta G$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Déterminer α et β. Démontrer que s est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une symétrie vectorielle que l'on déterminera.

5. On désigne par φ l'application affine de π dans π associée à l'application linéaire $h = f - 2g$ et laissant le point O invariant. Soit Ω le cercle de centre O et de rayon 1 et Ω' son image par φ ?

a. Écrire l'équation cartésienne de Ω' relativement au repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right)$.

b. En déduire la nature de Ω', son centre, ses axes de symétrie, ses foyers, son excentricité et ses directrices.