

∞ Baccalauréat C Caen septembre 1976 ∞

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x) &= -x^2 + x^2 \operatorname{Log} x \quad \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f .
2. Étudier la fonction et construire le graphe C dans un repère orthonormé $x'Ox, y'Oy$.
3. Trouver l'aire de la partie du plan, comprise entre l'axe $x'Ox$, le graphe C et les droites d'équation $x = 0$ et $x = e$.

EXERCICE 2

1. Trouver les diviseurs de 3108 (ce nombre étant écrit en base dix).
2. On considère le nombre qui s'écrit 3114 en base dix. Existe-t-il une base dans laquelle il s'écrit 1976 ? Déterminer cette base.

PROBLÈME

Partie A

Soit A l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à termes réels de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

1. Comment doit-on choisir les réels a et b pour que M soit inversible ?
2. On appelle \mathcal{B} le sous-ensemble des matrices inversibles de A . Montrer que \mathcal{B} est un sous-groupe commutatif du groupe multiplicatif des matrices inversibles.

Partie B

On pose dans la suite du problème $a = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$, $b = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ avec $\alpha \in [0, \pi]$.

Soit \mathcal{E} un plan vectoriel euclidien de base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) .

On désigne par φ_α l'application linéaire de \mathcal{E} dans \mathcal{E} de matrice

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \alpha & 1 - \cos \alpha \\ 1 - \cos \alpha & 1 + \cos \alpha \end{pmatrix}$$

1. Quelle valeur faut-il donner à α pour que φ_α ne soit pas bijective ? Déterminer, dans ce cas, le noyau N et l'image I de cet endomorphisme.
2. Quelles valeurs faut-il donner à α pour que φ_α soit involutive ? Identifier φ_α pour chaque valeur trouvée.

Partie C

Soit un plan affine euclidien E associé à \mathcal{E} et muni du repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On appelle f_π l'application affine de E associée à φ_π telle que $f_\pi(O) = O'$ avec O' de coordonnées $(-1; 1)$.

1. Tout point m de E de coordonnées $(x; y)$ a pour image par f_π le point m' de coordonnées $(x'; y')$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
Déterminer l'ensemble des points de E invariants par f_π . En déduire la nature géométrique de f_π .
2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$g(x) = x - 2 + \frac{9}{x-3}.$$

Étudier les variations de g . On appelle (C) sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3. Trouver l'équation de la transformée (C') de (C) par f_π . Construire (C) et (C') dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
4. Déterminer l'aire du domaine plan fermé limité par les deux courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives $x = 4$ et $y = 5$.

Partie D

Dans le plan affine euclidien E associé à \mathcal{E} et de repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on donne les points $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $O'(-1; 1)$, $A'(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4})$, $B'(-\frac{3}{4}; \frac{7}{4})$.

1. Soit m un point de E de coordonnées $(x; y)$.
Déterminer, en fonction de x et y , les trois réels α, β, γ vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et tels que m soit le barycentre des trois points O, A et B affectés respectivement des coefficients α, β, γ .
Soit f' l'application qui, à tout point $m(x; y)$, associe le point $m'(x'; y')$ barycentre des points O', A', B' affectés respectivement des coefficients α, β, γ .
Montrer que f' est une application affine dont l'endomorphisme associé est de la forme φ_α . On notera α_0 la valeur de α ainsi obtenue.
2. Démontrer que, pour deux valeurs de nombre réel λ , il existe des vecteurs \vec{u} de \mathcal{E} , distincts du vecteur nul vérifiant $\varphi_{\alpha_0}(\vec{u}) = \vec{u}$.
Montrer que l'ensemble de ces vecteurs est la réunion de deux droites vectorielles.
Montrer que le vecteur $\overrightarrow{mm'}$ est élément de l'une de ces droites vectorielles pour tout $m \in E$.
Déterminer l'ensemble des points invariants par f' . En déduire la construction de l'image par f' de la droite d'équation $x = 2$.