Baccalauréat C Clermont-Ferrand septembre 1976

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \text{Log}\left(x^2 - 1\right) + \frac{1}{x^2 - 1}$$

(Log désignant le logarithme népérien).

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$\text{Log}\left(x^2 - 1\right) = \text{Log}\,(x+1) + \text{Log}\,(x-1).$$

   Même question pour l'équation

$$\text{Log}\left(x^2 - 1\right) = 2\text{Log}\,x + \text{Log}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

   Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Log}\left(x^2 - 1\right)}{x}$
2. Étudier les variations de f et la représenter graphiquement.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $4x - 5y = 3$.
2. Trouver le ou les nombres N s'écrivant xy en base six, les chiffres x et y vérifiant $4x - 5y = 3$.

   Même question en base dix.

PROBLÈME

Partie A

Soit la loi de composition interne $\star$ définie sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes par

$$\left(z\,;\,z'\right) \longmapsto z \star z' = z\overline{z'} \quad \text{où } \overline{z'} \text{ désigne le conjugué de } z'.$$

1. Cette loi est-elle commutative ? associative ? Existe-t-il dans $\mathbb{C}$ un élément neutre pour cette loi ?
2. Discuter et résoudre dans $\mathbb{C}$, suivant les valeurs des paramètres complexes m et k, l'équation $m \star z = k$.
3. Existe-t-il z complexe tel que $z \star (z \star z) = \text{i}$?

Partie B

Dans la suite du problème, à chaque nombre complexe $z = x + \text{i}y$ (x et y réels) on associe le point $M(z)$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans un plan affine euclidien orienté P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.

On désigne par $\text{P}^\star$ le plan P privé de l'origine O.

Pour chaque nombre réel non nul k, on définit l'application T_k de $\text{P}^\star$ dans lui-même, qui au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z \star z' = k.$$

1. Calculer les coordonnées de M' en fonction de celles de M. Que peut-on en déduire pour les points O, M et M' ?

2. Quelle est la nature de l'application composée $T_m \circ T_k$ où k et m sont réels non nuls ? Pour quelles valeurs de k, T_k est-elle involutive ?

Partie C

1. Soient (C) le cercle de centre O et de rayon 1 ; (C') le cercle de rayon 2 et de centre A d'affixe $1+2\text{i}$; (D) la droite d'équation $y = x$, privée du point O ; (D') la droite d'équation $y - 2x + 1 = 0$. Trouver les transformés de (C), (C'), (D) et (D') par T_1.

On tracera sur un même dessin (C), (C'), (D) et (D') et leurs transformés.

2. Soit T' la transformation ponctuelle qui, au point M d'affixe z associe, lorsque cela est possible, le point M'' d'affixe

$$z'' = \frac{1}{2\text{i}z - 1}.$$

Donner la nature et les éléments caractéristiques de $T_1 \circ T'$.

Partie D

On note $\mathbb{R}^\star$ l'ensemble des nombres réels non nuls. Pour chaque couple $(\alpha\ ;\ \beta) \in \mathbb{R}^{\star 2}$, on définit une transformation ponctuelle de $\text{P}^\star$ par :

$$t_{(\alpha,\ \beta)} : \begin{array}{ccc} \text{P}^\star & \rightarrow & \text{P}^\star \\ M(x\ ;\ y) & \longmapsto & N(\alpha x\ ;\ \beta y) \end{array}$$

1. Reconnaître et donner la nature des applications :

$$t_{(1,\ 1)},\quad t_{(-1,\ 1)},\quad t_{(1,\ -1)}\quad \text{et } t_{(-1,\ -1)}$$

2. Soit $\mathcal{T} = \left\{t_{(\alpha,\ \beta)} ; (\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^{\star 2}\right\}$.

Étudier la structure de $\mathcal{T}$ muni de la loi de composition habituelle des applications.

3. Soit $t = \left[T_1 \circ t_{(2,\ 1)}\right]^{-1}$, application réciproque de $T_1 \circ t_{(2,\ 1)}$.

Exprimer t en fonction de T_1 et d'un élément de $\mathcal{T}$. Quelle est l'image (E) par t de la droite (Δ) d'équation $4x + 2y - 1 = 0$.

Construire (E) et en donner les éléments géométriques.