

☞ Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1976 ☞

EXERCICE 1

Un couple souhaite avoir n enfants ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$).

On considère qu'à chaque naissance, l'ensemble des réalisations possibles est $\Omega = \{G; F\}$.

G étant l'événement « avoir un garçon »

F étant l'événement « avoir une fille »,

ces deux événements étant équiprobables.

On considère que les naissances sont indépendantes les unes des autres.

Pour la i -ème naissance, on construit la variable aléatoire réelle

$$\begin{aligned} X_i : \Omega &\rightarrow [0; 1] \\ G &\mapsto 1 \\ F &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Soit $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

1. Dans cette question, $n = 3$.

a. Déterminer la probabilité que, parmi ses 3 enfants, le couple ait exactement 3 garçons.

Même question avec :

- exactement 2 garçons,
- exactement 1 garçon,
- exactement 0 garçon.

b. Construire la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X .

2. Déterminer n pour que la probabilité de ne pas avoir de garçon soit strictement inférieure à $\frac{1}{100}$.

EXERCICE 2

À chaque nombre complexe $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) on associe le point $M(z)$ de coordonnées $(x; y)$ dans un plan affine euclidien orienté P rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

1. Déterminer l'ensemble D des points M de P , d'affixe $z = x + iy$, tels que

$$|z - 1| = |z - (1 + \sqrt{3}) + i|$$

Représenter graphiquement D .

2. Soit l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = -iz + (3 - i).$$

Déterminer géométriquement f .

Déterminer l'ensemble D' , image de D par f . Représenter graphiquement D' .

PROBLÈME

Partie A

Soit λ un nombre réel fixé, non nul.

Soit μ un nombre réel fixé, non nul.

Pour chaque couple $(a; b)$ de \mathbb{R}^2 , on définit la fonction $f_{a,b}$ par :

$$\begin{aligned} f_{a,b} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_{a,b}(x) = e^{\lambda x}(a \cos \mu x + b \sin \mu x). \end{aligned}$$

Soit $E = \{f_{a,b}; (a; b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. a. Soit F l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Si l'on note $+$ l'addition des fonctions, et \bullet la multiplication d'une fonction par un nombre réel, on sait que $(F, +, \bullet)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Démontrer que $(E, +, \bullet)$ en est un sous-espace vectoriel.
- b. Démontrer que $(f_{1,0}, f_{0,1})$ est une base \mathcal{B} de E .
2. a. Démontrer que $f_{a,b}$ est dérivable sur \mathbb{R} et que sa fonction dérivée $f'_{a,b}$ appartient à E .
Démontrer que l'application D définie sur E par $D(f_{a,b}) = f'_{a,b}$ est un endomorphisme de E .
- b. Déterminer la matrice M de D dans la base \mathcal{B} . En déduire que D est un isomorphisme de E . Déterminer la matrice M^{-1} de D^{-1} dans la base \mathcal{B} (on note D^{-1} l'application réciproque de D).
3. a. Si l'on pose $F = D^{-1}(f_{a,b})$, montrer que F est une primitive de $f_{a,b}$.
- b. En déduire une primitive de la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x e(\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x) \end{aligned}$$

- c. Soit C la représentation graphique de f dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , l'unité de longueur étant le centimètre. L'unité d'aire étant le centimètre carré, déterminer l'aire géométrique S de la partie du plan comprise entre la courbe C et les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ et $y = 0$, c'est-à-dire de la partie formée des points dont les coordonnées x, y vérifient

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ |y| \leq |f(x)| \text{ et } y \bullet f(x) \geq 0 \end{cases}$$

On tracera succinctement l'arc de C obtenu pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

Partie B

Cette partie est indépendante de la question (A, 2., b.).

Soit deux nombres réels strictement positifs fixés α et β . On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f_{a,b}, f_{a',b'}) &\mapsto \alpha a a' + \beta b b'. \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E . Pour quelles valeurs de α et β , \mathcal{B} est-elle une base orthonormée de E muni de φ .
Dans la suite, on choisit ces valeurs pour α et β et on oriente E de façon que \mathcal{B} en soit une base directe.
2. On fixe maintenant $\lambda = \mu = 1$.
 - a. Démontrer que D est le produit d'une homothétie vectorielle par une rotation vectorielle. On déterminera ces deux applications linéaires.

- b.** Soit \mathcal{E} un espace affine associé à E et rapporté à un repère (O, \mathcal{B}) . Soit d l'application affine dont l'application linéaire associée est D , et qui transforme $A(1; 2)$ en $A'(1; 0)$.

Quelle est la nature de d ? Déterminer analytiquement d . Donner les éléments caractéristiques de d .