Baccalauréat C Dijon juin 1976

EXERCICE 1

1. Calculer en fonction de n la somme des n premiers entiers naturels non nuls,

2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{p=1}^{p=n} p^3 = \left(\sum_{p=1}^{p=n} p\right)^2$$

(Le candidat pourra utiliser un raisonnement « par récurrence »).

Soit s la suite de terme général

$$s_n = \sum_{p=1}^{p=n} p^3.$$

Exprimer s_n en fonction de n.

3. Soit D_n le plus grand diviseur commun des nombres s_n et s_{n+1}. Calculer D_n lorsque :

a. $n = 2k$

b. $n = 2k+1$

En déduire que, pour $n > 1$, D_n est différent de 1 et que trois termes consécutifs s_n, s_{n+1}, s_{n+2} de la suite s sont premiers entre eux dans leur ensemble.

EXERCICE 2

Soit P un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1}\ ;\ \overrightarrow{e_2}\right)$.

Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. À tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1}\ ;\ \overrightarrow{e_2}\right)$, on associe son affixe, le nombre complexe $z = x + \text{i}y$. On rappelle que i est un nombre complexe dont le carré vaut -1.

Soit A le point de coordonnées $(1\,;\,0)$ et B le point de coordonnées $(0\,;\,1)$ dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1}\ ;\ \overrightarrow{e_2}\right)$.

1. Soit S_1 la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$, et dont une détermination de l'angle est $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à tout nombre complexe z d'image M, associe le nombre complexe z' d'image $M' = S_1(M)$.

2. Soit A$'$ et B$'$ les images de A et B par S_1. Démontrer qu'il existe une similitude directe S_2 et une seule qui transforme A en B$'$ et B en A$'$.

Préciser son centre, son rapport et donner une détermination de son angle (Le candidat devra faire une figure soignée).

3. De l'étude du produit $S_2 \circ S_1$ où $\circ$ représente le produit de composition des applications, déduire une expression de S_2 sous la forme $S_2 = S_1 \circ S$, S étant une symétrie par rapport à un point que l'on précisera.

PROBLÈME

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle x, définies sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^\star$ des nombres réels strictement positifs.

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle t, définies et continues sur $[0~;~1]$, ainsi que leur fonction dérivée première f'.
On rappelle que chacun de ces deux ensembles, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel, a une structure d'espace vectoriel sur le corps des nombres réels.

Partie A

1. Calculer l'intégrale

$$I(x) = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t,$$

x étant un paramètre réel strictement positif, e la base des logarithmes népériens.

2. **a.** Soit g la fonction numérique de la variable réelle x donnée par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{\pi x} - 1 - \pi x.$$

Étudier le sens de variation de g ; en déduire que, pour tout réel x strictement positif, $g(x)$ est strictement positif.

b. Étudier les variations de la fonction numérique I de la variable réelle x, définie pour tout réel x strictement positif, par :

$$I(x) = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t.$$

On ne demande pas de tracer la courbe représentative.

Partie B

1. **a.** Soit f une fonction, élément de $\mathscr{E}$. Justifier l'existence, pour tout nombre réel x strictement positif, de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Soit L cie l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ qui, à tout élément f de $\mathscr{E}$ associe la fonction F définie pour tout réel x strictement positif, par

$$F(x) = \int_0^{\pi} e\mathrm{e}^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que L est une application linéaire.

2. Pour toute fonction f de $\mathscr{E}$, on pose

$$L(f) = F \quad ; \quad L\left(f'\right) = F^{\star}.$$

Démontrer que la fonction $F^{\star}$ est définie, pour tout réel x strictement positif, par :

$$F^{\star}(x) = \mathrm{e}^{-\pi x} f(\pi) - f(0) + xF(x).$$

Partie C

Soit f_1, f_2, f_3 les trois fonctions numériques définies sur $[0~;~\pi]$ par

$$\begin{array}{lcl} f_1(t) & = & 1 \\ f_2(t) & = & \cos 2t \\ f_3(t) & = & \sin 2t \end{array}$$

Soit $\mathscr{E}_1$ l'ensemble des fonctions numériques $af_1 + bf_2 + cf_3$, pour tout triplet $(a,~b,~c)$ de nombres réels.

1. Démontrer que $\mathscr{E}_1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dont une base $\mathscr{B}$, est $\left(f_1,\ f_2,\ f_3\right)$.

2. On note L_1 la restriction de L à $\mathscr{E}_1$ c'est-à-dire l'application de $\mathscr{E}_1$ dans $\mathscr{F}$ définie par :

$$(\forall f \in \mathscr{E}_1)(L_1(f) = L(f) = F)$$

a. Déterminer les fonctions

$$F_1 = L_1\left(f_1\right), \quad F_2 = L_1\left(f_2\right), \quad F_3 = L_1\left(f_3\right)$$

b. Soit f un élément de $\mathscr{E}_1$ exprimé dans la base $\mathscr{B}$. Calculer $F(x)$, pour tout nombre réel x strictement positif.

c. Démontrer que L_1 est une application injective.

3. a. Soit f un élément de $\mathscr{E}_1$. Justifier le fait que $f([0\ ;\ \pi])$ est un intervalle fermé $[m\ ;\ M]$,avec $m \leqslant M$.

b. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$m \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-\pi x}}{x} \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-\pi x}}{x}$$

c. x étant donné égal à x_0, démontrer qu'il existe au moins un réel t_0 de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ tel que

$$F\left(x_0\right) = f\left(t_0\right)\frac{1 - \mathrm{e}^{-\pi x}}{x_0}$$

Calculer t_0 dans le cas particulier :

$$f = f_1 + f_2 + f_3 \quad \text{et} \quad x_0 = 2.$$