Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Dijon septembre 1975 ∽

EXERCICE 1

Soit $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'anneau des classes d'entiers relatifs modulo 6 :

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}.$$

Résoudre dans cet ensemble le système, dont les inconnues sont x et y :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\overline{3}x+\overline{2}y &=& \overline{1}\\ \overline{3}x+\overline{5}y &=& \overline{1}\end{array}\right.$$

EXERCICE 2

Dans le plan complexe, au point M d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe z', par la transformation T définie par

$$z' = \frac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\overline{z}+\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

où $\overline{z}$ représente le nombre complexe conjugué de z et i le complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Quelle est la nature de la transformation T ? En donner les éléments caractéristiques.

PROBLÈME

Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle, définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. On rappelle que cet ensemble peut être muni des deux lois de composition :

$f+g : x \longmapsto f(x)+g(x)$

$\lambda \cdot f : x \longmapsto \lambda f(x)$, où λ est un réel et f, g deux éléments de $\mathscr{D}$.

On note ω la fonction nulle qui, à tout x réel, associe 0.

Alors $(\mathscr{P}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Partie A

1. Soit f_0 la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(t) = \mathrm{e}^{-t}$, e étant la base des logarithmes népériens.
   Vérifier que f_0 est élément de $\mathscr{D}$ et justifier l'existence, pour tout x réel, du nombre $\displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, que l'on note $g_0(x)$.
   On calculera ce nombre en faisant une intégration par parties.
   Démontrer que la fonction g_0 qui, à tout réel x associe $g_0(x)$, est un élément de $\mathscr{D}$.
2. Soit f un élément de $\mathscr{D}$, et x un réel ; justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
   Démontrer que la fonction numérique g, définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, est un élément de $\mathscr{D}$.
   Calculer sa dérivée g' à l'aide de f.

Partie B

Soit f un élément de $\mathscr{D}$, et F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = f(x) - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que F est élément de $\mathscr{D}$ et exprimer sa fonction dérivée première F à l'aide de f et de f. Calculer $F(0)$.

2. On appelle φ l'application de $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{D}$, qui, à tout élément f de $\mathscr{D}$, associe F

$$\varphi(f) = F.$$

Calculer $\varphi(\omega)$, $\varphi\left(f_0\right)$, f_0 étant la fonction définie en A 1.

Démontrer que φ est une application linéaire de $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{D}$.

3. On se propose de résoudre dans $\mathscr{D}$ l'équation (1) $\quad \varphi(f) = \omega$.

a. On suppose qu'il existe une fonction f, distincte de ω, solution de (1). Calculer $f(0)$. Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) - xf(x) = 0$.

On considère alors la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$; calculer la dérivée première f_1', et en déduire que f_1 est la fonction ω.

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1). L'application φ est-elle injective ?

4. On se propose de résoudre dans $\mathscr{D}$, l'équation (2) $\varphi(f) = h$, d'inconnue f, h étant un élément donné de $\mathscr{D}$.

a. Démontrer que si cette équation admet une solution, elle n'en admet qu'une seule.

b. Supposant que f est une solution de l'équation (2), on considère la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Démontrer que $f_1'(x) = h'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ et que $f_1(0) = h(0)$.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (2). L'application φ est-elle surjective ?

d. Résoudre dans $\mathscr{D}$ l'équation $\varphi(f) = h$ lorsque h est la fonction définie par :

$$h(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - 1.$$