Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Étranger groupe I septembre 1975 ∾

EXERCICE 1

On considère l'intégrale

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} (\operatorname{Log} x)^n \,\mathrm{d}x$$

dans laquelle n désigne un entier naturel, e la base des logarithmes népériens et Log x le logarithme népérien de x.

1. Pour tout x réel de l'intervalle $[1~;~\mathrm{e}]$, comparer

$$(\operatorname{Log} x)^{n-1} \quad \text{et} \quad (\operatorname{Log} x)^{n}.$$

   Montrer que la suite de terme général I_n est décroissante et minorée.

2. En utilisant une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre I_{n-1} et I_n.
   Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3

EXERCICE 2

Dans un plan affine rapporté à un repère cartésien donné, on note $M(x~;~y)$ le point de coordonnées x et y.
Soit les points $\mathrm{A}(-1~;~1)$, $\mathrm{B}(1~;~-1)$, $\mathrm{C}(1~;~1)$.
Déterminer le couple $(x~;y)$ pour que $M(x~;~y)$ soit le barycentre de A affecté du coefficient x, B affecté du coefficient y et C affecté du coefficient 1.

PROBLÈME

N. B. : Toutes les courbes seront tracées dans un plan $(\mathscr{P})$ orienté rapporté à un repère orthonormé d'axes $\left(x'\mathrm{O}x,~y'\mathrm{O}y\right)$.

1. On considère la fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \longmapsto f(x) = x + 1 - \frac{5}{2}\sqrt{x}.$$

   a. Étudier les variations de la fonction f. Construire la courbe représentative (C_1) des variations de cette fonction.

   b. Déterminer les points communs à (C_1) et aux axes de coordonnées.

   c. Déterminer l'aire du domaine $(\mathscr{D})$, ensemble des points $\mu(x~;~y)$ tels que :

$$\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 4 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant 0.$$

2. **a.** On désigne par (C) l'ensemble des points $M(x~;~y)$ du plan $(\mathscr{P})$ dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$4y^2 - 8xy + 4x^2 - 8y - 17x + 4 = 0 \qquad (1)$$

   Montrer que (C_1) est une partie de (C). Construire (C).

b. On désigne par (Γ) l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan $(\mathcal{P})$ dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$4y^2 + 8xy + 4x^2 + 8y - 17x + 4 = 0 \qquad (2)$$

Construire (Γ).

3. Dans le plan complexe $(\mathcal{P})$, le point $M(x\,;\,y)$ a pour affixe z tel que $z = x + \mathrm{i}y$. On désigne par $\overline{z}$ le nombre complexe conjugué de z (z = x - iy).

On rappelle que i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

a. Exprimer, en fonction de z et de $\overline{z}$, les nombres réels suivants :

$$x \quad ; \quad y \quad ; \quad x^2 + y^2 \quad ; \quad xy.$$

b. En déduire une relation nécessaire et suffisante, que vérifient z et d $\overline{z}$, pour que le point M d'affixe z appartienne à (C).

c. Soit le point $N(X\,;\,Y)$ d'affixe Z, tel que $Z = X + \mathrm{i}Y$, transformé du point M dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Exprimer Z en fonction de z.

Trouver une relation nécessaire et suffisante que vérifient Z et $\overline{Z}$ pour que N appartienne à la courbe (P) transformée de la courbe (C) dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

En déduire l'équation de la courbe (P) et la nature de la courbe (C).

4. On désigne par (C_λ) l'ensemble des points $Q(x\,;\,y)$ du plan $(\mathcal{P})$ dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$4y^2 - 8xy + 4x^2 - 8y + \lambda x + 4 = 0 \qquad (3)$$

dans laquelle λ désigne un paramètre réel.

a. En utilisant la relation (3) exprimer y en fonction de x.

b. Montrer que pour $\lambda = 8$, (C_λ) est une droite dont on donnera l'équation.

Dans toute la suite du problème, on supposera : $\lambda \neq 8$.

c. Montrer que, pour une valeur quelconque de λ différente de 8, la courbe (C_λ) est située dans un demi-plan de frontière $y'\mathrm{O}y$; préciser lequel.

Montrer que les courbes (C_λ) passent par un point fixe.

d. Montrer que les courbes (C_λ) sont des paraboles.