

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Lille juin 1976 ∞

EXERCICE 1

On considère l'application de l'ensemble des complexes \mathbb{C} dans lui-même qui, à z , associe

$$f(z) = iz^3 + (2i - 1)z^2 - (i + 4)z + 3(2i - 1)$$

1. Dans le cas où z est un réel, écrire $f(z)$ sous la forme $\alpha + i\beta$ où α et β sont des réels exprimés en fonction de z .
En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet une racine réelle z_0 que l'on calculera.
2. Démontrer que $f(z)$ peut s'écrire

$$f(z) = (z - z_0)(Az^2 + Bz + C)$$

et résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $f(z) = 0$.

EXERCICE 2

Soit φ la fonction numérique à variable réelle définie par

$$\begin{cases} \varphi(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pour } x \neq 0 \\ \varphi(0) &= 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction φ est continue sur \mathbb{R} .
2. Démontrer que la fonction φ est dérivable sur \mathbb{R} .
3. Étudier les variations de φ et construire la courbe représentative de φ dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
4. Démontrer que φ est intégrable sur $[0; x]$, x étant un réel quelconque. (On ne demande pas de calculer l'intégrale de φ sur $[0; x]$).

PROBLÈME :

On rappelle que l'ensemble \mathcal{M}_2 des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Soit \mathcal{M}'_2 l'ensemble des matrices carrées de la forme

$$\begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-b}{2} & \frac{a+b}{2} \end{pmatrix} \quad \text{où } (a; b) \in \mathbb{R}^2.$$

et P le plan affine associé au plan vectoriel \mathcal{P} . On munit \mathcal{P} de la base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{i})$, et P du repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

1. Démontrer que \mathcal{M}'_2 est un sous-espace vectoriel de \mathcal{M}_2 .
2. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a. Démontrer que (U, V) est une base de \mathcal{M}'_2 .
- b. Calculer $U^2, V^2, U \cdot V, V \cdot U$.
3. Démontrer que la multiplication des matrices est une loi interne de \mathcal{M}'_2 .

Partie B

Soit $f_{a,b}$ l'application de P dans P définie par les formules

$$\begin{cases} x' &= \frac{a+b}{2}x + \frac{a-b}{2}y \\ y' &= \frac{a-b}{2}x + \frac{a+b}{2}y \end{cases}$$

x et y désignent les coordonnées d'un point M et x', y' celles de $M' = f_{a,b}(M)$, a et b sont deux nombres réels. 2 Soit F la famille des applications $f_{a,b}$, quand $(a; b)$ parcourt \mathbb{R}^2 .

1. Démontrer que la composée de deux applications de F est une application de F ; calculer c et d lorsque $f_{c,d} = f_{a,b} \circ f_{a',b'}$.
2. Pour quelles valeurs de a et b , $f_{a,b}$ a-t-elle une réciproque? Vérifier que celle-ci appartient alors à F .
3. n étant un entier strictement positif, calculer les nombres α_n et β_n définis par

$$f_{\alpha_n, \beta_n} = f_{\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}} \circ f_{a,b}$$

et la donnée de α_0 et β_0 .

4. Déterminer l'ensemble des points M du plan, tels que les points O, M et M' soient alignés.
5. En général, $f_{a,b}$ transforme une droite en une droite. Dans quels cas sont-elles parallèles?

Partie C

On pose $g_b = f_{1,b}$.

Le point M_0 de coordonnées $(x_0; y_0)$ a pour image par g_b , $M_1 = g_b(M_0)$ et on pose plus généralement $M_n = g_b(M_{n-1})$ pour n entier strictement positif.

1. a. Montrer que pour $|b| < 1$, les coordonnées $(x; y)$ de M_n ont des limites finies, les calculer.
- b. On suppose toujours $|b| < 1$. On désigne par A le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, et on considère le point P_n de coordonnées $(X_n; Y_n)$ défini par

$$\overrightarrow{AP_n} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2} + \dots + \overrightarrow{AM_n}$$

Comment faut-il choisir le point M_0 pour que X_n et Y_n aient des limites finies?

Quelles sont ces limites?

À quel ensemble appartiennent, alors, les points M_1, M_2, \dots, M_n ?

2. Dans cette question on considère $b = 3$.
 - a. Déterminer, par une équation dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la transformée (C') du cercle (C) de centre O et de rayon 1 par l'application g_3 .
 - b. Soit la courbe (E) dont une équation par rapport au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est :

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$$

On considère le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) défini de la façon suivante :

- r est une rotation vectorielle de \mathcal{P} dont une détermination de l'angle est α ($0 \leq \alpha < 2\pi$)
- $\vec{I} = r(\vec{i})$ et $\vec{J} = r(\vec{j})$

Déterminer α ($0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$) pour que l'équation de (E) dans le nouveau repère soit de la forme :

$$AX^2 + BY^2 + C = 0$$

En déduire la nature de (E) et en donner les éléments caractéristiques.