

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Lille juin 1976 ∞

EXERCICE 1

On considère l'application de l'ensemble des complexes  $\mathbb{C}$  dans lui-même qui, à  $z$ , associe

$$f(z) = iz^3 + (2i - 1)z^2 - (i + 4)z + 3(2i - 1)$$

1. Dans le cas où  $z$  est un réel, écrire  $f(z)$  sous la forme  $\alpha + i\beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels exprimés en fonction de  $z$ .  
En déduire que l'équation  $f(z) = 0$  admet une racine réelle  $z_0$  que l'on calculera.
2. Démontrer que  $f(z)$  peut s'écrire

$$f(z) = (z - z_0)(Az^2 + Bz + C)$$

et résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $f(z) = 0$ .

EXERCICE 2

Soit  $\varphi$  la fonction numérique à variable réelle définie par

$$\begin{cases} \varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pour } x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Démontrer que la fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
3. Étudier les variations de  $\varphi$  et construire la courbe représentative de  $\varphi$  dans un plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
4. Démontrer que  $\varphi$  est intégrable sur  $[0; x]$ ,  $x$  étant un réel quelconque. (On ne demande pas de calculer l'intégrale de  $\varphi$  sur  $[0; x]$ .)

PROBLÈME :

On rappelle que l'ensemble  $\mathcal{M}_2$  des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $\mathcal{M}'_2$  l'ensemble des matrices carrées de la forme

$$\begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-b}{2} & \frac{a+b}{2} \end{pmatrix} \quad \text{où } (a; b) \in \mathbb{R}^2.$$

et  $P$  le plan affine associé au plan vectoriel  $\mathcal{P}$ . On munit  $\mathcal{P}$  de la base orthonormée directe  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{i})$ , et  $P$  du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Partie A

1. Démontrer que  $\mathcal{M}'_2$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2$ .
2. Soit  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- a. Démontrer que  $(U, V)$  est une base de  $\mathcal{M}'_2$ .
  - b. Calculer  $U^2, V^2, U \cdot V, V \cdot U$ .
3. Démontrer que la multiplication des matrices est une loi interne de  $\mathcal{M}'_2$ .

### Partie B

Soit  $f_{a,b}$  l'application de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{P}$  définie par les formules

$$\begin{cases} x' = \frac{a+b}{2}x + \frac{a-b}{2}y \\ y' = \frac{a-b}{2}x + \frac{a+b}{2}y \end{cases}$$

$x$  et  $y$  désignent les coordonnées d'un point  $M$  et  $x', y'$  celles de  $M' = f_{a,b}(M)$ ,  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels. 2 Soit  $F$  la famille des applications  $f_{a,b}$ , quand  $(a; b)$  parcourt  $\mathbb{R}^2$ .

1. Démontrer que la composée de deux applications de  $F$  est une application de  $F$ ; calculer  $c$  et  $d$  lorsque  $f_{c,d} = f_{a,b} \circ f_{a',b'}$ .
2. Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$ ,  $f_{a,b}$  a-t-elle une réciproque? Vérifier que celle-ci appartient alors à  $F$ .
3.  $n$  étant un entier strictement positif, calculer les nombres  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  définis par

$$f_{\alpha_n, \beta_n} = f_{\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}} \circ f_{a,b}$$

et la donnée de  $\alpha_0$  et  $\beta_0$ .

4. Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan, tels que les points  $O, M$  et  $M'$  soient alignés.
5. En général,  $f_{a,b}$  transforme une droite en une droite. Dans quels cas sont-elles parallèles?

### Partie C

On pose  $g_b = f_{1,b}$ .

Le point  $M_0$  de coordonnées  $(x_0; y_0)$  a pour image par  $g_b$ ,  $M_1 = g_b(M_0)$  et on pose plus généralement  $M_n = g_b(M_{n-1})$  pour  $n$  entier strictement positif.

1. a. Montrer que pour  $|b| < 1$ , les coordonnées  $(x; y)$  de  $M_n$  ont des limites finies, les calculer.
- b. On suppose toujours  $|b| < 1$ . On désigne par  $A$  le point de coordonnées  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ , et on considère le point  $P_n$  de coordonnées  $(X_n; Y_n)$  défini par

$$\overrightarrow{AP_n} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2} + \dots + \overrightarrow{AM_n}$$

Comment faut-il choisir le point  $M_0$  pour que  $X_n$  et  $Y_n$  aient des limites finies?

Quelles sont ces limites?

À quel ensemble appartiennent, alors, les points  $M_1, M_2, \dots, M_n$ ?

2. Dans cette question on considère  $b = 3$ .
  - a. Déterminer, par une équation dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la transformée  $(C')$  du cercle  $(C)$  de centre  $O$  et de rayon 1 par l'application  $g_3$ .
  - b. Soit la courbe  $(E)$  dont une équation par rapport au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est :

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$$

On considère le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J})$  défini de la façon suivante :

- $r$  est une rotation vectorielle de  $\mathcal{P}$  dont une détermination de l'angle est  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 2\pi$ )
- $\vec{I} = r(\vec{i})$  et  $\vec{J} = r(\vec{j})$

Déterminer  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) pour que l'équation de  $(E)$  dans le nouveau repère soit de la forme :

$$AX^2 + BY^2 + C = 0$$

En déduire la nature de  $(E)$  et en donner les éléments caractéristiques.