Baccalauréat C Lille septembre 1976

EXERCICE 1

On note $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{11}$ les éléments de $Z/12\mathbb{Z}$.

1. Déterminer dans $Z/12\mathbb{Z}$ les diviseurs de zéro.
2. Résoudre dans $Z/12\mathbb{Z}$ l'équation :

$$x \in Z/12\mathbb{Z}, \quad x^2 - \overline{4}x + \overline{3} = \overline{0}.$$

où $\overline{4}, \overline{3}, \overline{0}$ sont des éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
(On pourra éventuellement essayer de mettre l'expression : $x^2 - 4x + 3$ sous forme d'un produit de facteurs).

EXERCICE 2

1. Résoudre l'équation :

$$(1+\mathrm{i})z^2 - 2\mathrm{i}(1+m)z + (\mathrm{i}-1)\left(m^2+1\right) = 0 \qquad (1)$$

z étant l'inconnue complexe et m un paramètre complexe.

2. Dans un plan affine euclidien E, rapporté à un repère orthonormé, on associe au point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ on dit que M est l'image de z, z l'affixe du point M.
Soit M_1 et M_2 les images de z_1 et z_2 solutions de l'équation (1), montrer que M_2 est l'image de M_1 dans une rotation (indépendante du paramètre m) dont on précisera le centre et l'angle.

PROBLÈME

On considère, dans ce problème,

- un plan vectoriel euclidien $\mathscr{P}$ muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
- un plan affine euclidien P portant le repère $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ associé au plan vectoriel $\mathscr{P}$.

Partie A

Soit φ l'endomorphisme du plan vectoriel dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\phi = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

où θ est un réel donné.

1. Montrer que l'ensemble des vecteur invariants par φ est une droite vectorielle $\mathscr{D}$ dont une base est le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ tel que θ soit une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u}\right)$.
2. Montrer que $\mathscr{D}$ est la seule droite vectorielle invariante de $\mathscr{P}$ par φ.
3. Démontrer que le noyau de φ est la droite vectorielle $\mathscr{D}'$ orthogonale à $\mathscr{D}$.
4. Déterminer l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{v'}$, images des différents vecteurs $\overrightarrow{v}$ du plan vectoriel $\mathscr{P}$ par φ.

Partie B

On se donne, dans le plan affine P, le point A, de coordonnées α et β, dans le repère $\mathscr{R}$, ainsi que la droite D, passant par A et de direction la droite vectorielle $\mathscr{D}$.

1. Montrer que les coordonnées x' et y' du point M' , projection orthogonale, sur la droite D, du point M de coordonnées x et y sont données par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x\cos^2\theta + y\sin\theta\cos\theta + \alpha\sin^2\theta - \beta\sin\theta\cos\theta \\ y' & = & x\sin\theta\cos\theta + y\sin^2\theta - \alpha\sin\theta\cos\theta + \beta\cos^2\theta \end{array}\right.$$

2. Montrer que l'application f qui associe ainsi, à tout point M de P, sa projection orthogonale, M', sur D est une application affine dont l'endomorphisme associé est φ, l'endomorphisme étudié plus haut.

Partie C

On considère l'ensemble des droites (D_θ) du plan P d'équation :

$$x\sin^2\theta - ysin\theta cos\theta + cos^2\theta = 0; \quad \theta \in]0\,;\,\pi[.$$

1. Montrer que toute droite (D_θ) est tangente à la parabole $(\mathscr{C})$ d'équation $y^2 - 4x = 0$ en un point M.

Préciser, en fonction de θ, les coordonnées du point M.

2. On projette, orthogonalement en F$'$, le foyer F de $(\mathscr{C})$, sur chacune des droites (D_θ).

Quel est l'ensemble des points F$'$?

3. Toute tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ est-elle une droite (D_θ) ? En déduire une propriété de $(\mathscr{C})$.

4. On projette orthogonalement l'origine O du repère $(\mathscr{R})$ en O$'$ sur la tangente en M à $(\mathscr{C})$. Montrer que l'ensemble (Γ) des points O$'$ quand M décrit la parabole, comprend la courbe (Γ_1) représentative de la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$x \longmapsto g(x) = \sqrt{\frac{-x^3}{x+1}}$$

Étudier les variations de g et tracer (Γ_1) puis (Γ).