

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Limoges juin 1976 ∞

EXERCICE 1

Une urne contient 5 boules numérotées 1, 2, 3, 3, 4.

On tire deux boules simultanément et on fait la somme  $X$  des nombres inscrits sur les boules tirées.

1. Quelle est la loi de probabilité de  $X$ ?
2. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ .
3. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de la variable aléatoire  $X$ ?

EXERCICE 2

1. Montrer que tout réel  $x$  différent de  $(-1)$  vérifie l'égalité :

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}$$

En déduire l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx = \text{Log } 2 - \left[ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right]$$

(Log signifiant logarithme népérien).

2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  différent de zéro et pour tout  $x$  élément de  $[0; 1]$  on a la double inégalité :

$$-x^n \leq \frac{(-x)^n}{1+x} \leq x^n.$$

En déduire les inégalités :

$$-\frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

et la limite, quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de la suite

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

PROBLÈME

Partie A

On considère dans le plan affine euclidien  $\pi$  rapporté à un repère orthonormé  $(\omega, \vec{u}, \vec{v})$  l'application affine  $g$  qui, à tout point  $H$  de coordonnées  $(p; q)$  associe le point  $H'$  de coordonnées  $(p'; q')$  vérifiant :

$$\begin{cases} p' &= p \text{Log } x - q \text{Log } y \\ q' &= p \text{Log } y + q \text{Log } x \end{cases}$$

$x$  et  $y$  étant des paramètres réels strictement positifs, le symbole Log désignant le logarithme népérien.

1. Pour quelle valeur du couple  $(x ; y)$ , l'application  $g$  n'est-elle pas bijective sur  $\pi$  ?
2. Dans cette question, on considère les couples  $(x ; y)$  comme les coordonnées d'un point  $M$  d'un plan affine euclidien  $P$  rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
  - a. Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que  $g$  soit une homothétie.
  - b. Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que  $g$  soit involutive.  
On trouvera deux points et on précisera, pour chacun, la nature de  $g$ .
  - c. Déterminer l'ensemble  $(K)$  des points  $M$  tels que  $g$  soit une isométrie affine. On se bornera à donner l'équation de  $(K)$ .

### Partie B

On appelle  $P$  le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $P^+$  l'ensemble des points de  $P$  dont les coordonnées sont strictement positives. On considère l'application  $\varphi : P \rightarrow P^+$  telle que l'image par  $\varphi$  d'un point  $M$  de coordonnées  $(x ; y)$  soit le point  $M'$  de coordonnées  $(x' ; y')$  vérifiant :

$$\begin{cases} x' &= e^x \\ y' &= e^y \end{cases}$$

( $e$  étant la base des logarithmes népériens).

1. Montrer que  $\varphi$  est une bijection de  $P$  sur  $P^+$ . Existe-t-il des points de  $P$  invariants par  $\varphi$  ?
2. Donner l'équation de  $\varphi(D)$ , image par  $\varphi$  de la droite  $(D)$  d'équation :

$$ax + by + c = 0.$$

On précisera la nature et la position de  $\varphi(D)$  dans les cas particuliers suivants :

- a.  $a$  (ou  $b$ ) est nul.
- b.  $a = b$ .

### Partie C

1. Montrer que l'image par  $\varphi$  du cercle de centre  $O$  et de rayon 1 est l'ensemble  $(K)$  défini au A 2. c).
2. Étudier les fonctions numériques :

$$y_1 = e^{\sqrt{1 - \log^2 x}}, \quad y_2 = e^{-\sqrt{1 - \log^2 x}}.$$

Déduire de leurs représentations graphiques le tracé de  $(K)$ .

Montrer que  $(K)$  admet la première bissectrice comme axe de symétrie. Calculer les coordonnées des intersections  $A$  et  $B$  de cette bissectrice et de  $(K)$ .

Déterminer les points de contact  $A'$  et  $B'$  de  $(K)$  avec les tangentes à  $(K)$  issues de  $O$ .

Nature du quadrilatère  $AA'BB'$ .

Note : Les parties A et B - sont entièrement indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque. La partie C dépend partiellement de A et de B.