

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Limoges juin 1976 ∞

EXERCICE 1

Une urne contient 5 boules numérotées 1, 2, 3, 3, 4.

On tire deux boules simultanément et on fait la somme X des nombres inscrits sur les boules tirées.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X .
3. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de la variable aléatoire X ?

EXERCICE 2

1. Montrer que tout réel x différent de (-1) vérifie l'égalité :

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}$$

En déduire l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx = \text{Log } 2 - \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right]$$

(Log signifiant logarithme népérien).

2. Montrer que pour tout entier naturel n différent de zéro et pour tout x élément de $[0; 1]$ on a la double inégalité :

$$-x^n \leq \frac{(-x)^n}{1+x} \leq x^n.$$

En déduire les inégalités :

$$-\frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

et la limite, quand n tend vers $+\infty$ de la suite

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

PROBLÈME

Partie A

On considère dans le plan affine euclidien π rapporté à un repère orthonormé $(\omega, \vec{u}, \vec{v})$ l'application affine g qui, à tout point H de coordonnées $(p; q)$ associe le point H' de coordonnées $(p'; q')$ vérifiant :

$$\begin{cases} p' &= p \text{Log } x - q \text{Log } y \\ q' &= p \text{Log } y + q \text{Log } x \end{cases}$$

x et y étant des paramètres réels strictement positifs, le symbole Log désignant le logarithme népérien.

1. Pour quelle valeur du couple $(x ; y)$, l'application g n'est-elle pas bijective sur π ?
2. Dans cette question, on considère les couples $(x ; y)$ comme les coordonnées d'un point M d'un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - a. Déterminer l'ensemble des points M tels que g soit une homothétie.
 - b. Déterminer l'ensemble des points M tels que g soit involutive.
On trouvera deux points et on précisera, pour chacun, la nature de g .
 - c. Déterminer l'ensemble (K) des points M tels que g soit une isométrie affine. On se bornera à donner l'équation de (K) .

Partie B

On appelle P le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) et P^+ l'ensemble des points de P dont les coordonnées sont strictement positives.

On considère l'application $\varphi : P \rightarrow P^+$ telle que l'image par φ d'un point M de coordonnées $(x ; y)$ soit le point M' de coordonnées $(x' ; y')$ vérifiant :

$$\begin{cases} x' = e^x \\ y' = e^y \end{cases}$$

(e étant la base des logarithmes népériens).

1. Montrer que φ est une bijection de P sur P^+ . Existe-t-il des points de P invariants par φ ?
2. Donner l'équation de $\varphi(D)$, image par φ de la droite (D) d'équation :

$$ax + by + c = 0.$$

On précisera la nature et la position de $\varphi(D)$ dans les cas particuliers suivants :

- a. a (ou b) est nul.
- b. $a = b$.

Partie C

1. Montrer que l'image par φ du cercle de centre O et de rayon 1 est l'ensemble (K) défini au A 2. c).
2. Étudier les fonctions numériques :

$$y_1 = e^{\sqrt{1 - \text{Log}^2 x}}, \quad y_2 = e^{-\sqrt{1 - \text{Log}^2 x}}.$$

Déduire de leurs représentations graphiques le tracé de (K) .

Montrer que (K) admet la première bissectrice comme axe de symétrie. Calculer les coordonnées des intersections A et B de cette bissectrice et de (K) .

Déterminer les points de contact A' et B' de (K) avec les tangentes à (K) issues de O .

Nature du quadrilatère $AA'BB'$.

Note : Les parties A et B - sont entièrement indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque. La partie C dépend partiellement de A et de B .