

**Durée : 4 heures**

∞ Baccalauréat C Lyon juin 1976 ∞

**EXERCICE 1**

Soit la fonction numérique  $f$  de la variable réelle définie par :  $2 - 2x$

$$f(x) = x^2 e^{-2x}.$$

1. Étudier et représenter graphiquement cette fonction dans un repère ortho-normé.
2. Calculer l'aire du domaine plan délimité par les axes de coordonnées, la courbe représentative de  $f$  et de la droite d'équation  $x = \alpha$  où  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . Cette aire admet-elle une limite lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ ?

**EXERCICE 2**

On considère l'ensemble  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}$ .

1. Dresser la table de multiplication de l'anneau  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  l'équation  $\dot{2}x = \dot{2}$
3. Résoudre dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  le système

$$\begin{cases} \dot{2}x + \dot{3}y = \dot{2} \\ \dot{2}x + \dot{1}y = \dot{2} \end{cases}$$

4. Résoudre dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  l'équation  $\dot{2}x^2 + \dot{2}x = \dot{0}$ .

**PROBLÈME**

**N.B.** - Les parties A, B et C - sont indépendantes.

On considère l'ensemble  $K$  des matrices  $M(a, b)$  de la forme

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a - 2b \end{pmatrix} \quad \text{où } (a; b) \in \mathbb{R}^2.$$

**Partie A**

1.
  - a. Démontrer que  $K$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{M}$  des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
  - b. Démontrer que  $K$  est un corps commutatif pour l'addition et la multiplication des matrices.
2. Soit  $f$  l'application de  $K$  dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes définie par

$$M(a, b) \longmapsto z - (a - b) + ib\sqrt{2}.$$

- a. Démontrer que  $f$  est un isomorphisme de l'espace vectoriel  $K$  sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ . En déduire la dimension de  $K$ .
- b. Démontrer que  $f$  est un isomorphisme du corps  $K$  sur le corps  $\mathbb{C}$ .

3. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 - i = 0$ .

Utiliser  $f$  pour trouver les matrices  $M$  de  $K$  telles que  $M^3 = A'$ , où  $A'$  est la matrice antécédent de  $i$  par  $f$ .

### Partie B

Une urne contient 3 jetons numérotés 0, 1, -1. Un premier tirage donne un numéro noté  $a$ ; on remet le jeton et un second tirage donne un numéro noté  $b$ . Les tirages sont équiprobables. On obtient ainsi un couple  $(a, b)$  et on lui associe la matrice  $M(a, b)$  de  $K$ .

Soit  $\vec{P}$  un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

On note  $\varphi_{a,b}$  l'endomorphisme de  $\vec{P}$  dont la matrice dans  $(\vec{i}, \vec{j})$  est  $M(a, b)$ . Quelles sont les probabilités pour que cet endomorphisme soit :

1. Une rotation vectorielle ?
2. Une symétrie vectorielle orthogonale ?

### Partie C

Soit  $P$  un plan affine euclidien associé au plan vectoriel euclidien  $\vec{P}$ , muni d'un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $E$  le point de coordonnées  $(0; 2)$  et  $F$  le milieu de  $(O, E)$ . Soit  $h$  l'application affine associée à l'endomorphisme  $\varphi_{0, \frac{1}{4}}$  dont la matrice dans  $(\vec{i}, \vec{j})$  est  $M(0, \frac{1}{4})$  et telle que  $h(E) = O$ .

1. Soit  $s$  la symétrie orthogonale de  $P$  par rapport à la droite affine contenant  $F$  et de vecteur directeur  $\vec{i}$ . Démontrer que  $g = h \circ s$  admet comme expression analytique dans  $\mathcal{R}$

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{4}y \\ y' &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

2. Soit  $M_0$  le point de coordonnées  $(x_0; y_0) = (2; 2)$  dans  $\mathcal{R}$ . On pose :

$$M_1 = g(M_0), \dots, M_n = g(M_{n-1}) = g^n(M_0)$$

pour  $n$  élément de  $\mathbb{N}^*$ .

On se propose de déterminer la position limite de  $M_n$  quand  $n$  augmente indéfiniment en cherchant les valeurs limites des suites réelles  $c$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $(x_n; y_n)$  sont les coordonnées de  $M_n$  dans  $\mathcal{R}$ .

- a. Démontrer que la suite définie par  $v_n = x_n + y_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , est une suite géométrique. Est-ce que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, c'est-à-dire est-ce que  $v_n$  a une limite finie lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?  
Exprimer  $x_n + y_n$  en fonction de  $n$ .
- b. Démontrer par récurrence sur  $n : \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n > 0 \text{ et } y_n > 0$ .
- c. On considère la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{x_n}{y_n}$ . Démontrer qu'elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3u_n + 2}.$$

$$\text{Soit} \quad w_n = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{u_n + 1}.$$

Démontrer que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique.

Donner l'expression de  $w_n$ , puis de  $u_n$  en fonction de  $n$ . En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

- d. En utilisant les valeurs de  $u_n = \frac{x_n}{y_n}$  et  $v_n = x_n + y_n$ , donner les expressions de  $x_n$  et  $y_n$  en fonction de  $n$ .  
En déduire les limites des suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et la position limite des points  $M_n$  quand  $n$  augmente indéfiniment.