

Durée : 4 heures

œ Baccalauréat C Lyon juin 1976 œ

EXERCICE 1

Soit la fonction numérique f de la variable réelle définie par : $2 - 2x$

$$f(x) = x^2 e^{-2x}.$$

1. Étudier et représenter graphiquement cette fonction dans un repère ortho-normé.
2. Calculer l'aire du domaine plan délimité par les axes de coordonnées, la courbe représentative de f et de la droite d'équation $x = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Cette aire admet-elle une limite lorsque α tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2

On considère l'ensemble $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}$.

1. Dresser la table de multiplication de l'anneau $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{2}x = \dot{2}$
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ le système

$$\begin{cases} \dot{2}x + \dot{3}y = \dot{2} \\ \dot{2}x + \dot{1}y = \dot{2} \end{cases}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{2}x^2 + \dot{2}x = \dot{0}$.

PROBLÈME

N.B. - Les parties A, B et C - sont indépendantes.

On considère l'ensemble K des matrices $M(a, b)$ de la forme

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a - 2b \end{pmatrix} \quad \text{où } (a; b) \in \mathbb{R}^2.$$

Partie A

1.
 - a. Démontrer que K est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathcal{M} des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
 - b. Démontrer que K est un corps commutatif pour l'addition et la multiplication des matrices.
2. Soit f l'application de K dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes définie par

$$M(a, b) \longmapsto z - (a - b) + ib\sqrt{2}.$$

- a. Démontrer que f est un isomorphisme de l'espace vectoriel K sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . En déduire la dimension de K .
- b. Démontrer que f est un isomorphisme du corps K sur le corps \mathbb{C} .

3. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^3 - i = 0$.

Utiliser f pour trouver les matrices M de K telles que $M^3 = A'$, où A' est la matrice antécédent de i par f .

Partie B

Une urne contient 3 jetons numérotés 0, 1, -1. Un premier tirage donne un numéro noté a ; on remet le jeton et un second tirage donne un numéro noté b . Les tirages sont équiprobables. On obtient ainsi un couple (a, b) et on lui associe la matrice $M(a, b)$ de K .

Soit \vec{P} un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) .

On note $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme de \vec{P} dont la matrice dans (\vec{i}, \vec{j}) est $M(a, b)$. Quelles sont les probabilités pour que cet endomorphisme soit :

1. Une rotation vectorielle ?
2. Une symétrie vectorielle orthogonale ?

Partie C

Soit P un plan affine euclidien associé au plan vectoriel euclidien \vec{P} , muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit E le point de coordonnées $(0; 2)$ et F le milieu de (O, E) . Soit h l'application affine associée à l'endomorphisme $\varphi_{0, \frac{1}{4}}$ dont la matrice dans (\vec{i}, \vec{j}) est $M(0, \frac{1}{4})$ et telle que $h(E) = O$.

1. Soit s la symétrie orthogonale de P par rapport à la droite affine contenant F et de vecteur directeur \vec{i} . Démontrer que $g = h \circ s$ admet comme expression analytique dans \mathcal{R}

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{4}y \\ y' &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

2. Soit M_0 le point de coordonnées $(x_0; y_0) = (2; 2)$ dans \mathcal{R} . On pose :

$$M_1 = g(M_0), \dots, M_n = g(M_{n-1}) = g^n(M_0)$$

pour n élément de \mathbb{N}^* .

On se propose de déterminer la position limite de M_n quand n augmente indéfiniment en cherchant les valeurs limites des suites réelles c et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $(x_n; y_n)$ sont les coordonnées de M_n dans \mathcal{R} .

- a. Démontrer que la suite définie par $v_n = x_n + y_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique. Est-ce que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, c'est-à-dire est-ce que v_n a une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$?
Exprimer $x_n + y_n$ en fonction de n .
- b. Démontrer par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n > 0$ et $y_n > 0$.
- c. On considère la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{x_n}{y_n}$. Démontrer qu'elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3u_n + 2}.$$

$$\text{Soit} \quad w_n = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{u_n + 1}.$$

Démontrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

Donner l'expression de w_n , puis de u_n en fonction de n . En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

- d. En utilisant les valeurs de $u_n = \frac{x_n}{y_n}$ et $v_n = x_n + y_n$, donner les expressions de x_n et y_n en fonction de n .
En déduire les limites des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la position limite des points M_n quand n augmente indéfiniment.