Baccalauréat C Lyon septembre 1976

EXERCICE 1

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On appelle affixe du point M le couple de coordonnées $(x\ ;\ y)$ le nombre complexe z égal à $x+\text{i}y$.
T désigne l'application du plan dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point $T(M)$ d'affixe z^3.

1. Calculer les coordonnées de $T(M)$ en fonction de x et de y.
2. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que M et $T(M)$ aient même abscisse est que M appartienne à $\left(\text{O},\ \vec{v}\right)$ ou à une hyperbole (H) d'axe transverse $\left(\text{O},\ \vec{u}\right)$. Préciser les sommets et les asymptotes de cette conique et la représenter dans le plan.
   Démontrer que tout point M appartenant à l'une des asymptotes de H est tel que $T(M)$ appartient à $\left(\text{O},\ \vec{v}\right)$.

EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien orienté P rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ on considère :

- la rotation $\mathscr{R}_1$ de centre $\text{A}_1(0\ ;\ 2)$ et dont l'angle a pour mesure $+\dfrac{\pi}{2}$ en radians.
- la rotation $\mathscr{R}_2$ de centre $\text{A}_2(-2\ ;\ 0)$ et dont l'angle a pour mesure $-\dfrac{\pi}{2}$ en radians.
- la symétrie orthogonale S par rapport à la droite A_1A_1.

1. Déterminer, sans calcul, en utilisant le groupe des isométries de P la nature et les éléments caractéristiques des applications
$$f_1 = \mathscr{R}_1 \circ S \quad \text{et} \quad f_2 = \mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2$$
2. Confirmer ces résultats à l'aide des expressions analytiques de f_1 et de f_2 ?

PROBLÈME

Partie A

On se propose de déterminer l'ensemble F des fonctions f numériques d'une variable réelle définies sur $]-1\ ;\ +\infty[$, dérivables sur cet intervalle vérifiant :

$$\forall x \in]-1\ ;\ +\infty[,\quad (1+x)f'(x) + f(x) = 1 + \text{Log}\,(1+x)$$

$(\text{Log}\,(1+x)$ est le logarithme népérien de $(1+x))$.

1. Soit $f \in F$ et soit g définie par :
$$\forall x \in]-1\ ;\ +\infty[,\quad g(x) = (1+x)f(x).$$
   Démontrer que g est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$ et que g est une primitive de la fonction h définie par :

$$\forall x \in]-1\ ;\ +\infty[, \quad h(x) = 1 + \text{Log}\,(1+x)$$

Réciproquement, soit g_1 une primitive de la fonction h. Démontrer que la fonction f_1 définie par :

$$\forall x \in]-1\ ;\ +\infty[, \quad f_1(x) = \frac{g_1(x)}{1+x}$$

est un élément de F.

2. **a.** Déterminer les réels A et B tels que

$$\forall x \in]-1\ ;\ +\infty[, \quad \frac{x}{1+x} = A + \frac{B}{1+x}$$

b. À l'aide d'une intégration par parties déterminer l'ensemble des primitives de la fonction h.

c. En déduire l'ensemble F.

Partie B

On considère l'ensemble des fonctions f_k de $]-1\ ;\ +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in]-1\ ;\ +\infty[, \quad f_k(x) = \text{Log}\,(1+x) + \frac{k}{1+x},\ k \in \mathbb{R}$$

1. Discuter suivant les valeurs de k, le sens de variation des fonctions f_k.

2. Tracer, avec soin, dans un même repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ les représentations graphiques des fonctions f_1, f_0, f_{-1}.

3. Soient $M_1(t)$, $M_2(t)$, $M_3(t)$ les points d'abscisse t sur les représentations graphiques respectives des fonctions f_{k_1}, f_{k_2}, f_{k_3}. Démontrer que le rapport :

$$\frac{\overline{M_1(t)M_2(t)}}{\overline{M_1(t)M_3(t)}} \quad \text{est indépendant de } \ t.$$

Partie C

1. Soit $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n-1} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{2n-1}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier n et pour tout réel $x \in]-1\ ;\ +\infty[$

$$f_0'(x) = P_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}$$

2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]0\ ;\ 1[, \quad \dfrac{x^{2n}}{1+x} \leqslant x^{2n}$.

En déduire pour tout entier $n \geqslant 1$ la double inégalité

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,\text{d}x \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$

3. On considère la suite (w_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad w_n = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n}.$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad f_0(1) = w_0 + \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,\text{d}x$.

En déduire que la suite (w_n) admet, lorsque n tend vers $+\infty$, une limite que l'on précisera. Trouver un entier n_0 tel que $\text{Log}\,2 - w_{n_0} < 0,1$.