Durée : 4 heures

Baccalauréat C Maroc juin 1976

EXERCICE 1 **points**

1. Vérifier que le couple (2 ; 3) est solution de :

$$41x - 27y = 1 \qquad (x,\, y) \in \mathbb{N}^2$$

2. En déduire une solution particulière de :

$$41x - 27y = 5 \qquad (x,\, y) \in \mathbb{N}^2$$

3. Donner toutes les solutions de :

$$41x - 27y = 5 \qquad (x,\, y) \in \mathbb{N}^2$$

EXERCICE 2 **points**

1. Déterminer deux constantes réelles A et B telles que :

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}$$

Calculer alors :

$$J = \int_1^2 \frac{1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t$$

2. Calculer l'intégrale :

$$I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

PROBLÈME **points**

Les parties A et B peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

Partie A

1. **a.** Soit E un espace vectoriel et soit φ une application linéaire de E dans E telle que $\varphi \circ \varphi = \text{Id}$. ($Id$ désignant l'application identique de E dans E). Montrer que φ est bijective. Soit :

$$E^+ = \{V \in E \quad \varphi(V) = +V\} \qquad E^- = \{V \in E \quad \varphi(V) = -V\}$$

Montrer que E^+ et E^- sont deux sous-espaces vectoriels de E, et que $E^+ \cap E^- = \{0\}$.

Pour chaque $V \in E$, on pose :

$$V^+ = \frac{1}{2}\big(V + \varphi(V)\big) \qquad V^- = \frac{1}{2}\big(V - \varphi(V)\big)$$

Montrer que $V^+ \in E^+$ et que $V^- \in E^-$, et que $V = V^+ + V^-$. En déduire que E est somme directe des deux sous-espaces vectoriels E^+ et E^-.

b. A chaque triplet (α, β, γ) de nombres réels, on associe l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \alpha x+\beta \text{e}^{x}+\gamma \text{e}^{-x}$. On désigne par F_c l'ensemble de toutes les applications f obtenues quand α, β, γ parcourent $\mathbb{R}$. Montrer que F_c est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Prouver que l'ensemble des trois applications :

$$x \longmapsto x \qquad x \longmapsto \text{e}^{x} \qquad x \longmapsto \text{e}^{-x}$$

constitue une base de F_c.

c. Soit A l'application de F_c dans F_c qui à tout $f \in F_c$ associe $g = A(f)$ définie par $g(x) = f(-x)$. Montrer que $A \circ A = \text{Id}$. (Id désignant l'application identique de F_c dans F_c). On considère l'application f_0 de F_c définie par :

$$f_0(x) = \text{e}^{x}$$

f_0^+ et f_0^- sont définies comme dans I - 1. (E remplacé par F_c, et φ remplacé par A). Déterminer f_0^+ et f_0^-. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$\left(f_0^+(x)\right)^2 - \left(f_0^-(x)\right)^2 = 1$$

d. Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $z(t) \in \mathbb{C}$ le nombre complexe sont les parties réelle et imaginaire sont respectivement $af_0^+(t)$ et $bf_0^-(t)$, où a et b sont deux réels strictement positifs. Trouver une relation indépendante de t entre $\Re(z(t))$, la partie réelle de $z(t)$ et $\Im(z(t))$, la partie imaginaire de $z(t)$.

Soit M_t le point d'affixe $z(t)$. Démontrer que M_t appartient à une conique, indépendante de t, dont on donnera une équation.

Partie B

Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Soit H l'hyperbole admettant comme équation dans ce repère :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a et b désignent des nombres réels strictement positifs donnés.

On désigne par S le groupe des similitudes du plan P_c. On chercher dans cette partie à caractériser la partie E_c de S formée des similitudes s qui laissent H invariante (c'est à dire telles que $s(H) = H$).

On rappelle qu'une similitude est une bijection de P sur lui-même, qu'elle transforme une droite en une droite, et qu'elle multiplie les longueurs par une constante positive (rapport de similitude).

a. Faire une représentation graphique de H en plaçant ses asymptotes.

b. Soit $s \in S$. Montrer que O est point double pour s (c'est à dire que $s(\text{O})=\text{O}$).

On pourra pour cela se servir de la caractérisation suivante du centre d'une hyperbole :

- Toute droite passant par le centre rencontre l'hyperbole en zéro ou deux points.
- Par tout point autre que le centre, il passe au moins une droite rencontrant l'hyperbole en un seul point.

c. Soit A et A' les sommets de H (c'est à dire les deux points de H situés sur la droite Ox). On pose $B = s(A)$. Montrer que la distance des deux points O et B (notée $\left\|\overrightarrow{\text{O}B}\right\|$) est au moins égale à celle de O et A (notée $\left\|\overrightarrow{\text{O}A}\right\|$). En déduire que k, le rapport de similitude de s, est au moins égal à 1.

d. Montrer que $k = 1$, et montrer que $s(A)$ est soit A, soit A'.

e. En déduire que l'ensemble E_c est constitué par quatre éléments, qui sont :
- Id, l'application identique
- S_{O}, la symétrie par rapport à l'origine
- S_1, la symétrie orthogonale par rapport à Ox
- S_2 la symétrie orthogonale par rapport à Oy.

Vérifier que E_c est un sous-groupe de S.