

Durée : 4 heures

⌘ Baccalauréat C Nancy juin 1976 ⌘

EXERCICE 1

On définit la suite de terme général u_n par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{N}, & u_0 \geq 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

1. On pose $v_n = u_n - 3$.

Montrer que la suite (v_n) ainsi définie est une suite géométrique. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de u_0 et de n .

2. Quels sont les nombres entiers u_0 ($u_0 \geq 4$) tels que, pour tout n , 3^{u_n} soit le cube d'un entier naturel?
3. On suppose $u_0 = 4$; déterminer toutes les valeurs de n telles que $3^{u_n} - 1$ soit un multiple de 11.

EXERCICE 2

On considère le polynôme :

$$P(z) = z^3 - 4iz^2 - (7 + 2i)z - 6 + 12i.$$

1. Trouver une racine réelle α de l'équation $P(z) = 0$.
2. Calculer les nombres complexes a et b , tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z - \alpha)(z^2 + az + b).$$

3. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.

PROBLÈME

On désigne par \mathcal{E} un espace affine euclidien de dimension 2, rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

Soit (H) la courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) de la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}}{2x}.$$

1. Étudier la fonction f et tracer (H) .
2. On appelle (D) celle des asymptotes de (H) qui n'est parallèle à aucun des axes, et (Δ) celle des bissectrices des droites (D) et (O, \vec{j}) qui rencontre (H) .

Déterminer une mesure des angles $\left(\widehat{(O, \vec{i}), (D)}\right)$ et $\left(\widehat{(O, \vec{i}), (\Delta)}\right)$.

3. Soit a un nombre réel supérieur ou égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$; on désigne par (D_a) la droite d'équation $x = a$.

Calculer l'aire de la partie du plan, située dans le demi-plan $x > 0$, limitée par les droites (D) , (Δ) , la courbe (H) et la droite (D_a) . Trouver a tel que cette aire soit égale à $\sqrt{3}$.

Partie B

Soit \vec{i} un vecteur unitaire de (Δ) .

1. Déterminer un vecteur \vec{j} , tel que (O, \vec{i}, \vec{j}) soit un repère orthonormé.
2. Donner l'équation de (H) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
3. Quelle est la nature de la conique (H) ? On précisera ses éléments dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) : sommets, foyers, directrices, excentricité.

Partie C

On considère l'ensemble G des isométries du plan euclidien \mathcal{E} laissant la courbe (H) globalement invariante.

1. Montrer que la loi de composition des applications est une loi interne sur G , et que G muni de cette loi a une structure de groupe.
2. Montrer qu'une isométrie g est élément de G si et seulement si g conserve l'ensemble des foyers de (H) .
3. En déduire tous les éléments de G .
4. Donner la table de composition du groupe G ; ce groupe est-il commutatif ?

Partie D

Soit M un point de \mathcal{E} de coordonnées $(x ; y)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , animé d'un mouvement déterminé par

$$\begin{cases} x(t) &= \sqrt{3}e^t \\ y(t) &= e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \end{cases}$$

1. Déterminer la trajectoire du point M et le sens de parcours.
2. Calculer les vecteurs vitesse et accélération du point M .
Préciser à quels instants et sur quelles parties de la trajectoire le mouvement est accéléré ou retardé.