Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Nantes juin 1976 ∾

EXERCICE 1

Soit A l'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

1. Résoudre dans $A \times A$ le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\overline{6}x+\overline{4}y & = & \overline{4}\\ \overline{5}x+y & = & \overline{4}\end{array}\right.$$

2. Résoudre dans A l'équation :

$$x^2+\overline{4}x+\overline{3}=\overline{0}.$$

EXERCICE 2

On rappelle que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes a une structure d'espace vectoriel réel dont une base est $\mathscr{B} = (1,\ \text{i})$.
Soit p un complexe donné :

$$p = a+\text{i}b \quad (a \text{ et } b \text{ sont réels}).$$

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à tout complexe z, associe Z défini par :

$$Z = z + p\overline{z} \qquad (E)$$

($\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de z).

1. Démontrer que f est une application linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

2. **a.** Trouver en fonction de a et b la matrice M de f par rapport à la base $\mathscr{B} = (1,\ \text{i})$.

b. Démontrer que f est une bijection si, et seulement si, a^2+b^2 est différent de 1.

3. À partir de la relation (E), trouver une relation entre z, Z et $\overline{Z}$.
Retrouver ainsi le résultat de la question 2. b.

PROBLÈME

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Chaque point M du plan peut être repéré par ses coordonnées réelles $(x\ ;\ y)$ ou par son affixe complexe $z = x+\text{i}y$.

Partie A

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \text{e}^{-2x}+x+1.$$

1. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative (C) dans le repère $\mathcal{R}$.
   (On étudiera avec soin les branches infinies de (C) : on pourra étudier le comportement de $\dfrac{f(x)}{x}$ pour les valeurs de x negatives et de « grande » valeur absolue.)
   On indiquera les valeurs exactes des coordonnées du point correspondant au minimum de f.
   Pour dessiner (C), on utilisera l'approximation $\text{Log}\,2 \approx 0,7$).
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}(m)$ de la surface plane finie limitée par la courbe (C), l'axe $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ des ordonnées, l'asymptote oblique de (C) et la droite d'équation $x = m$, m étant un réel positif donné.
   Étudier $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \mathcal{A}(m)$.

Partie B

$\mathcal{P}$ étant le plan vectoriel associé au plan affine P, on considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{P}$ (application linéaire de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$) défini par sa matrice A dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}\ ;\ \overrightarrow{\jmath}\right)$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. φ est-il un automorphisme ? Démontrer qu'il existe trois réels k, a, b avec

   $$k > 0 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = 1$$

   qui vérifient

   $$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

   En déduire qu'il existe une homothétie vectorielle h et une symétrie vectorielle orthogonale s par rapport à une droite vectorielle (que l'on déterminera avec précision) qui vérifient :

   $$\varphi = h \circ s = s \circ h.$$

2. Soit F celle des applications affines du plan P associée à l'endomorphisme φ qui transforme le point O en le point $\text{O}'(-1\ ;\ -1)$.
   a. Le point M ayant pour coordonnées $(x\ ;\ y)$, calculer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de son image M' par F.
   Calculer l'affixe z' de M' en fonction de $\overline{z}$ (on rappelle que z désigne l'affixe de M et que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z).
   b. Déterminer les coordonnées du point Ω invariant par F.
   Si H est l'homothétie de centre Ω, et de rapport k, déterminer la transformation S définie par :

   $$F = H \circ S = S \circ H.$$

   Quelle est la nature de F ?

Partie C

1. Démontrer que la courbe $\left(C'\right)$ transformée de (C) par F admet pour équation :

   $$y = g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = x - \text{Log}\,x$$

   (Log désigne la fonction logarithme népérien).

2. Étudier les variations de la fonction g et construire la courbe $\left(C'\right)$.

3. n étant un entier naturel donné, déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\left(C'\right)$ et de la droite (Δ_n) d'équation :

$$y = x + n.$$

4. Soit (U_n) la suite numérique dont le terme général U_n est égal à l'aire de la surface plane finie limitée par la courbe $\left(C'\right)$, l'axe $\left(\text{O},\ \overrightarrow{J}\right)$ des ordonnées et les droites (Δ_n) et (Δ_{n+1}).

   a. Calculer U_n et montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

   b. Calculer la somme S_p des $(p+1)$ premiers termes de cette suite, soit

$$S_p = \sum_{n=0}^{n=p} U_n$$

   c. Étudier $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_p$.
   Justifier le résultat obtenu en utilisant la limite de l'aire calculée en A 2. et l'application F définie dans B.