

☞ Baccalauréat C Nice septembre 1976 ☞

EXERCICE 1

Un joueur dispose de 3 dés qu'il lance simultanément. Leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Il ne les lance qu'une fois.

Son gain est ainsi attribué :

- si les trois chiffres sortis sont égaux, il gagne 5 F;
- si parmi les trois chiffres il y a deux « 1 » et deux seulement, il gagne 2 F;
- si les trois chiffres sont consécutifs, alors il gagne 1 F;
- dans tout autre cas, son gain est nul.

On appelle X la variable aléatoire correspondant à son gain.

1. Établir la loi de probabilité, ou distribution, de X .
2. Établir la fonction de répartition.
En donner une représentation graphique.
3. Calculer $E(X)$ (espérance mathématique de X).

EXERCICE 2

Le plan affine P est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère l'application f de P dans P qui, à tout point $M(x; y)$, associe le point $M'(x'; y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \\ y' &= -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une application affine non bijective. Déterminer l'ensemble D des points de P invariants par f .
2. Étudier l'ensemble des antécédents par f d'un point donné $M'(a'; b')$ de P , en distinguant deux cas, suivant que M' appartient, ou n'appartient pas, à D .
3. Reconnaître l'application f et préciser ses éléments.

PROBLÈME

Partie A

Dans toute la suite, on note \mathbb{R}_+^* et \mathbb{N}^* l'ensemble des réels positifs, et l'ensemble des entiers naturels privés de zéro.

1. Étudier la fonction numérique f définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$f(x) = \text{Log} \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x}.$$

En déduire que, pour tout réel t supérieur à 1, on a l'inégalité

$$(1) \quad \int_1^t x \text{Log} \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx \geq \int_1^t \frac{x}{1+x} dx.$$

2. Soit g la fonction numérique définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$g(x) = e^{x \operatorname{Log} \left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

Calculer $g'(x)$; en déduire sur \mathbb{R}_+^* une primitive de f .

Calculer l'aire G du domaine limité par la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé, l'axe des abscisses de ce repère, les droites d'équation $x = \alpha$, $x = \beta$ où α et β sont deux réels donnés vérifiant $0 < \alpha < \beta$, puis étudier la limite de cette aire lorsque β tend vers $+\infty$ et α tend vers 0.

3. Vérifier que la fonction numérique h définie par $h(x) = \operatorname{Log} g(x)$ est croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Utiliser la fonction en escalier k définie sur $[1; n[$ ($n \in \mathbb{N}^*$) par

$$k(x) = p \operatorname{Log} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \quad \text{lorsque } x \in [p-1; p]$$

p prenant successivement toutes les valeurs entières de 2 à n , pour démontrer l'inégalité

$$(2) \quad \sum_{p=1}^n p \operatorname{Log} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \geq \int_1^n x \operatorname{Log} \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx.$$

Partie B

1. Démontrer que : $\forall \alpha > 0, \quad \operatorname{Log} \alpha \leq \alpha - 1$.
(On pourra étudier les variations de la fonction $x \mapsto \operatorname{Log} x - x + 1$).
2. Soient $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, n nombres réels strictement positifs.
En appliquant l'inégalité précédente à chacun des réels

$$\alpha_i = \frac{x_i}{\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

démontrer que :

$$(3) \quad \frac{1}{n} [\operatorname{Log} x_1 + \operatorname{Log} x_2 + \dots + \operatorname{Log} x_n] \leq \operatorname{Log} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

3. Démontrer que l'inégalité (3) est équivalente à

$$x_1 x_2 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^n$$

Partie C

On considère les suites (u) et (v) de terme général

$$n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

1. Démontrer que les suites de terme général u_n et $\operatorname{Log} u_n$ sont croissantes, convergentes et que leurs limites respectives sont e et 1.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq e$.
2. En utilisant les inégalités (1), (2) et (3), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \operatorname{Log} v_n \geq \frac{1}{n} \int_1^n \frac{x}{1+x} dx.$$

3. Calculer $\omega_n = \int_1^n \frac{x}{1+x} dx$ (on remarquera que $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$), puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega_n}{n}$.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} \omega_n \leq \operatorname{Log} v_n \leq 1$, et en déduire que (v) est convergente. Quelle est sa limite?