

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Orléans–Tours juin 1976 ∞

EXERCICE 1

1. Montrer que si deux nombres sont premiers entre eux, il en est de même pour leur somme et leur produit.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ le système :

$$\begin{cases} x + y &= 56 \\ \text{ppcm}(x; y) &= 105 \end{cases}$$

EXERCICE 2

Dans le plan complexe, on considère l'ensemble E_1 des points M d'affixe z vérifiant :

$$z^2 - (1 + i)^2 = \overline{z}^2 - (1 - i)^2$$

1. Déterminer et construire l'ensemble E_1 .
2. Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M vérifiant :

$$[z - (1 + i)][\overline{z} - (1 - i)] = 8.$$

3. Vérifier qu'il existe un point de $E_1 \cap E_2$ où les deux courbes ont même tangente.

PROBLÈME

Partie A

Soit E un espace vectoriel euclidien réel orienté de dimension 2, et (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée directe de E . Pour tout réel t , on appelle φ_t l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est :

$$\begin{pmatrix} e^{-t} \cos t & -e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{pmatrix}$$

1. Reconnaître φ_0 et φ_π . Montrer que φ_t est une similitude, composée de deux endomorphismes simples de E .
2. Soit F l'ensemble des endomorphismes φ_t . Montrer que F , muni de la composition des applications est isomorphe au groupe additif des réels.

Partie B

À l'espace vectoriel euclidien orienté E , on associe un espace affine \mathcal{E} , muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Pour tout nombre réel t on définit le point de coordonnées $(x; y)$ telles que :

$$\begin{cases} x &= e^{-t} \cos t \\ y &= e^{-t} \sin t \end{cases}$$

1. a. Étudier, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, les variations de la fonction f qui, à t réel, associe l'abscisse de M :

$$f(t) = e^{-t} \cos t.$$

- b. Comparer $f(t)$ et $f(t + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; en déduire les variations de f sur \mathbb{R} .
c. Soit u et v les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$u(t) = e^{-t} \quad v(t) = -e^{-t}.$$

(C_1) et (C_2) leur courbe représentative dans un repère $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$.

Déterminer $(C) \cap (C_1)$ et $(C_1) \cap (C_2)$ et en déduire que la fonction f n'admet pas de limite en $-\infty$?

- d. Comparer aux points de $(C) \cap (C_2)$ les tangentes à (C) et (C_1) (de même pour (C) et (C_2)).
e. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?
f. Utiliser ce qui précède pour représenter graphiquement f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

On pourra utiliser les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{array}{ll} e^{-\frac{\pi}{4}} = 0,455 & e^{-\frac{\pi}{4}} = 2,193 \\ e^{-\pi} = 0,043 & e^{-\frac{3\pi}{4}} = 0,094 \end{array}$$

2. Pour tout entier naturel k on pose :

$$a_k = \int_{-\frac{\pi}{2} + k\pi}^{-\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi} e^{-t} \cos t \, dt.$$

- a. Calculer cette intégrale (on pourra utiliser deux intégrations par parties).
b. Montrer que la suite b définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = |a_k|$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
c. Montrer que $\sum_{k=0}^{k=n} b_k$ a une limite quand n tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Partie C

Un point matériel M de \mathcal{E} est en mouvement pendant l'intervalle de temps $[0; +\infty[$. Sa position à la date t est définie par ses coordonnées dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) :

$$\begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases}$$

- Déterminer le vecteur vitesse \vec{V} de M et le vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ de M à la date t .
Le mouvement est-il accéléré, retardé?
- Démontrer que l'angle (\vec{OM}, \vec{V}) que fait le vecteur $\vec{OM}(t)$ avec le vecteur vitesse \vec{V} de M à la date t est constant et en donner une mesure.
- Exprimer $\|\vec{OM}(t)\|$ en fonction de t .
- Utiliser ce qui précède pour indiquer l'allure de la trajectoire de M .