Baccalauréat C Orléans–Tours septembre 1976

EXERCICE 1

f est la fonction réelle de la variable réelle x définie sur l'intervalle $\text{I} = \left[-\dfrac{\pi}{4}~;~\dfrac{\pi}{4}\right]$ par :

$$f(x) = |x| + \text{tg}\, x$$

1. Étudier cette fonction et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
2. Montrer qu'il existe un réel unique x_0 appartenant à I tel que :

$$f\left(x_0\right) = \dfrac{\pi}{8}.$$

3. Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\text{d}x$.

   Quelle est la valeur moyenne de f sur l'intervalle I ?

EXERCICE 2

On dispose de deux urnes dont l'une contient deux boules marquées 1, deux boules marquées 2 et deux boules marquées 3 et l'autre contient trois boules marquées 1, deux boules marquées 2 et une boule marquée 3.
On tire une boule dans chaque urne et on suppose que chaque couple de boules a la même probabilité d'être tiré.

1. Montrer que la probabilité d'obtenir 3 comme somme des nombres écrits est $\dfrac{5}{18}$.
2. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque couple de boules, associe la somme des nombres écrits sur ces boules.

   Donner la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

PROBLÈME

$\mathcal{V}$ étant un espace vectoriel réel, et $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}''$ deux sous-espaces vectoriels donnés de $\mathcal{V}$, on se propose d'étudier l'ensemble E des endomorphismes de $\mathcal{V}'$ de noyau $\mathcal{V}''$ et d'image $\mathcal{V}$.

Partie A

$\mathcal{V}$ est un plan vectoriel de base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{\imath}~\overrightarrow{\jmath}\right)$, $\mathcal{V}'$ est la droite vectorielle de base $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ et $\mathcal{V}''$ est la droite vectorielle de base $\overrightarrow{v''} = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath}$, où a et b sont deux réels différents de 0.

1. *On suppose $a \neq b$*

   a. Montrer que $\left(\overrightarrow{v'},~\overrightarrow{v''}\right)$ est une base de $\mathcal{V}$.

   b. Soit p la projection vectorielle sur $\mathcal{V}''$ parallèlement $\mathcal{V}'$. Est-ce que p est élément de E ?

c. Soit f un élément de E. Écrire sa matrice dans la base $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{v''}\right)$. En déduire que f est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une projection vectorielle que l'on déterminera. Y a-t-il commutativité de la composition ?

d. Démontrer que E est égal à l'ensemble des endomorphismes $h \circ p$, où h décrit l'ensemble $\mathcal{H}$ des homothéties vectorielles de $\mathcal{V}$.

e. E est-il stable pour la loi de composition des applications ? Même question pour l'addition des applications.

f. Montrer que l'application : $\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & E \\ h & \longmapsto & h \circ p \end{array}$

est un isomorphisme de groupe, les ensembles $\mathcal{H}$ et E étant munis de la loi de composition des applications de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$. Préciser l'élément neutre de $(E, \circ)$ et l'élément symétrique d'un élément donné de E.

2. *On suppose* $a = b$

a. Peut-on définir la projection vectorielle p de la partie A ?

b. Soit f_1, l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que f_1 est élément de E.

c. Soit f un endomorphisme de $\mathcal{V}$, de matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ dans la base B.

Donner les conditions nécessaires et suffisantes sur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour que f soit élément de E.

d. En déduire que E est égal à l'ensemble des endomorphismes $h \circ f_1$, où h décrit $\mathcal{H}$. E est-il stable pour la loi de composition des applications ?

Partie B

$\mathcal{V}$ est un espace vectoriel réel de dimension 2 ou 3. Si f est un élément de E, on notera Ker $f = \mathcal{V}'$ et Im $f = \mathcal{V}''$.

1. Donner un exemple de sous-espaces $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}''$ tels que E soit l'ensemble vide. On supposera dans la suite du problème que E n'est pas l'ensemble vide.

2. f et g étant deux éléments de E :

a. Montrer que $\mathcal{V}' \subset \text{Ker}\,(g \circ f)$ et $\text{Im}\,(g \circ f) \subset \mathcal{V}''$.

b. Si $\mathcal{V}' = \mathcal{V}''$, montrer que : $\forall \overrightarrow{v} \in \mathcal{V}$, $g \circ f\left(\overrightarrow{v}\right) = 0$.

E est-il stable pour la loi de composition des applications ? Rapprocher ce résultat de celui trouvé en première partie 2. d.

c. Si $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}''$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{V}$, montrer que quel que soit $\overrightarrow{v}$ appartenant à Ker $(g \circ f)$, $f\left(\overrightarrow{v}\right) = 0$ et montrer que

Im $(g \circ f) = \mathcal{V}''$. E est-il stable pour la loi de composition des applications ?

3. $\mathcal{V}''$ est une droite vectorielle de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}''$ un sous-espace supplémentaire de $\mathcal{V}''$ dans $\mathcal{V}$.

a. Montrer que pour tout élément f de E, $f\left(\mathcal{V}''\right) \subset \mathcal{V}''$. En déduire que pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathcal{V}$, $f\left(\overrightarrow{v}\right)$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

b. Démontrer que la restriction de f à $\mathcal{V}''$ est une homothétie vectorielle.

c. Démontrer que E est égal à l'ensemble des endomorphismes $h \circ p$, où h décrit l'ensemble des homothéties vectorielles de $\mathcal{V}$, p étant la projection vectorielle sur $\mathcal{V}''$ parallèlement à $\mathcal{V}'$.

N. B. - Dire que E est stable pour la loi de composition des applications signifie :

$$\forall (f,\ g) \in E^2, \quad g \circ f \in E.$$