

∞ Baccalauréat C Paris septembre 1976 ∞

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel, non nul. On considère les entiers A et B :

$$A = 3n^2 \quad B = n(2n + 1)$$

Déterminer suivant les valeurs de n , le plus grand commun diviseur de A et B .

EXERCICE 2

On considère dans \mathbb{C} , l'équation :

$$(1) \quad mz^4 + (m - i)z^2 - i = 0$$

où z désigne l'inconnue et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, et où m désigne un paramètre.

1. On suppose ici m réel ; résoudre l'équation.
2. On suppose ici m complexe, de module ρ et d'argument θ ; résoudre l'équation.
3. Trouver l'ensemble E des valeurs du paramètre (réelles ou complexes) pour lesquelles toutes les solutions de (1) sont de même module.

PROBLÈME

Partie A

On désigne par Log la fonction logarithme népérien.

1. On considère la fonction f qui, à x réel, associe

$$f(x) = \text{Log}(|\text{Log } x|)$$

Préciser son domaine de définition puis calculer, k étant un réel arbitraire, $f(e^k)$.

Etudier la fonction f et construire la courbe représentative (C) de f dans un plan P rapporté à un repère orthonormé (unité 2 cm).

Donner, s'il y en a, les points d'intersection de (C) et des axes de coordonnées, les tangentes à (C) en ces points.

2. Soient g et h les fonctions de la variable réelle x définies respectivement par

$$\begin{aligned} g(x) &= \text{Log}(\text{Log } x) \\ h(x) &= \text{Log}(|\text{Log}(|x|)|) \end{aligned}$$

Préciser leurs domaines de définition et, en utilisant la question précédente, indiquer leurs représentations graphiques dans le plan P .

Partie B

On considère la fonction φ , de la variable réelle x , définie par

$$\varphi(x) = \frac{1}{x \text{Log}(|x|)}$$

1. Préciser son domaine de définition ; étudier cette fonction et construire sa représentation graphique (Γ) dans un plan (P') rapporté à un repère orthonormé (unité : 2 cm). Calculer, k étant un réel non nul, $\varphi(e^k)$.
2. Soit α un réel strictement supérieur à un. On désigne par $D(\alpha)$ la partie du plan (P') ensemble des points $M(x; y)$ tels que :
 - x est compris entre α et e
 - $0 \leq y \leq \varphi(x)$.

Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de $D(\alpha)$. Étudier les limites de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers un, et lorsque α tend vers $+\infty$.

3. On pose, pour tout élément x du domaine de définition de φ :

$$\psi_1(x) = \varphi(x) - x$$

- a. Montrer que l'équation :

$$(1) \quad \psi_1(x) = 0$$

admet dans \mathbb{R}_+ une racine unique, que l'on notera α . Montrer que $\alpha > 1$.

- b. Exprimer, au moyen de α , les racines de l'équation (1) dans \mathbb{R} .
- c. En déduire l'ensemble E des points d'intersection de (Γ) et de la première bissectrice des axes de coordonnées.
- d. En s'aidant du dessin, trouver un encadrement de α par deux réels α_1 et α_2 distants de 0,1.

On pourra commencer par localiser approximativement α sur un intervalle I , puis on comparera x^{-2} et $\log x$ pour des valeurs de x appartenant à I et formant une progression arithmétique de raison 0,1.

4. En étudiant le signe de la fonction ψ_2 définie par

$$\psi_2(x) = \varphi(x) + x$$

montrer que (Γ) et la seconde bissectrice des axes de coordonnées n'ont aucun point commun.

Partie C

On considère la fonction t , définie sur une partie de \mathbb{C} , telle que : 1

$$t(z) = \frac{1}{z \operatorname{Log}|z|}$$

1. a. Déterminer le domaine D_t de définition de t .
 b. L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes $x + iy$ est représenté à l'aide des points $M(x; y)$ d'un plan P_1 muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .
 Déterminer lorsque z décrit D_t l'ensemble E_1 des points M d'affixe $z = x + iy$.
 On associe à t l'application T de E_1 dans P_1 qui, au point M d'affixe z , fait correspondre le point $M' = T(M)$ d'affixe $z' = t(z)$.
2. Exprimer le module et l'argument de $z' = t(z)$ au moyen de ceux de z .
3. En utilisant le résultat de B 3. déterminer les points de P_1 invariants par T .
4. Déterminer l'ensemble des points M du domaine de définition de T , qui sont tels que l'origine O , le point M et son image $M' = T(M)$ soient alignés,
5. Quel est le transformé par T d'un cercle de centre O et de rayon R strictement positif et différent de l'unité.

Données numériques approchées :

| | | | |
|----------|-------|-------|-------|
| x | 0,5 | 1 | 2 |
| e^x | 1,649 | 2,718 | 7,389 |
| e^{-x} | 0,607 | 0,368 | 0,135 |