

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Poitiers juin 1976 ∞

EXERCICE 1

L'ensemble référentiel est l'ensemble \mathbb{N}^* des entiers naturels non nuls ; x est un élément de \mathbb{N}^* , différent de 1 ; p et q sont des éléments de \mathbb{N}^* .

1. Montrer que si d est un diviseur de p , alors $x^d - 1$ est un diviseur de $x^p - 1$.
2. Montrer que si d est le P.G.C.D. de p et de q , alors il existe m et n tels que

$$mp - nq = d.$$

En déduire que si d est le P.G.C.D. de p et de q , on peut trouver m et n vérifiant :

$$(x^{mp} - 1) - (x^{nq} - 1)x^d = (x^d - 1).$$

3. De l'égalité précédente, déduire que $(x^d - 1)$ est le P.G.C.D. de $x^{mp} - 1$ et de $x^{nq} - 1$.

EXERCICE 2

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Au point M de coordonnées $(x; y)$ on fait correspondre le complexe $z = x + iy$, appelé affixe de M , et $\bar{z} = x - iy$ est l'imaginaire conjugué de z .

1. Soit f l'application de P vers P qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' dont l'affixe z' est :

$$z' = (1 - i\sqrt{3})z + 3 + 3i\sqrt{3}.$$

Quelle est l'image $f(\omega)$ du point ω d'affixe $1 + i\sqrt{3}$?

Montrer que f est une similitude inverse dont on précisera les éléments remarquables.

2. Soit g la symétrie affine orthogonale par rapport à la droite affine d'équation $y = x\sqrt{3}$. Calculer en fonction de x et y , coordonnées d'un point M , les coordonnées $(x'; y')$ de $M' = g(M)$.
3. Déterminer $g \circ f$ et donner ses éléments remarquables.

PROBLÈME

Partie A

Pour tout couple de réels $(a_1; b_1)$, on considère la fonction φ_1 définie sur l'ensemble \mathbb{R}_+ des réels positifs de la façon suivante :

$$\begin{cases} \varphi_1(0) &= 0 \\ \varphi_1(x) &= x(a_1 + b_1 \text{Log } x), \quad \forall x > 0. \end{cases}$$

1. On suppose dans cette question $a_1 = -b_1 = 1$.

- a. Montrer que la fonction φ_1 correspondante est continue sur \mathbb{R}_+ .
Est-elle dérivable sur \mathbb{R}_+ ? Déterminer la fonction dérivée φ_1' et la limite de cette fonction quand x tend vers 0 par valeurs positives.
- b. Étudier les variations de φ_1 . Construire sa courbe représentative (C_1) dans un plan rapporté à un repère orthonormé ; on précisera la nature de la branche infinie, la tangente à l'origine du repère et les points d'ordonnée nulle.
- c. Montrer que la fonction φ_2 :

$$x \mapsto \varphi_2(x) = \int_0^x \varphi_1(t) dt$$

est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

Calculer $\varphi_2(x)$. (On trouvera, pour x non nul, $\varphi_2(x) = \frac{x^2}{4}(3 - 2\text{Log } x)$).

Construire la courbe représentative (C_2) de φ_2 dans le même plan que (C_1) en précisant la nature de la branche infinie, la tangente à l'origine du repère, les points d'ordonnée nulle.

2. On suppose maintenant a_1 et b_1 réels quelconques.

- a. Étudier brièvement la continuité et la dérivabilité de la fonction φ_1 associée.

$$\begin{cases} \varphi_1(0) &= 0 \\ \varphi_1(x) &= x(a_1 + b_1 \text{Log } x), \quad \forall x > 0. \end{cases}$$

- b. Montrer que l'on peut définir sur l'ensemble des entiers naturels non nuls une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 0, \quad \forall x > 0, \quad \varphi_1(x) = x(a_1 + b_1 \text{Log } x) \\ \forall n > 1, \quad \forall x \geq 0, \quad \varphi_n(x) &= \int_0^x \varphi_{n-1}(t) dt. \end{aligned}$$

Vérifier qu'il existe deux suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall x > 0, \quad \varphi_n(x) = x^n(a_n + b_n \text{Log } x).$$

Former des relations de récurrence concernant les couples $(a_n; b_n)$ et $(a_{n+1}; b_{n+1})$.

Étudier la suite b .

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $t_n = n!a_n$.

Former une relation de récurrence satisfaite par t_n et t_{n+1} .

Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que :

$$\forall n \geq 1, \quad |t_n| = A + B \text{Log } n$$

(On pourra montrer que, pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on a $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \text{Log } n$).

Étudier alors la convergence de la suite a .

Partie B

À tout couple $(a; b)$ de réels, à tout entier naturel non nul p , on associe l'application φ de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi(x) &= x^p(a + b \text{Log } x), \quad \forall x > 0. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel non nul p , on note E_p l'ensemble décrit par φ lorsP que $(a; b)$ décrit \mathbb{R}^2 ?

1. Montrer que, si p est différent de 1, E_p est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+ .
Examiner le cas de $p = 1$.
On supposera dans la suite du problème $p \neq 1$.
2. Montrer que les éléments de E_p , notés u et v , obtenus respectivement en donnant à $(a ; b)$ les valeurs $(1 ; 0)$ et $(0 ; 1)$ forment une base de E_p .
3. Soit f l'application qui, à tout élément φ de E_p associe la fonction numérique $f(\varphi)$, notée g , définie sur \mathbb{R}_+ par : $g(x) = x.\varphi'(x)$.
Démontrer que f est un endomorphisme de E_p . Déterminer la matrice de f dans la base $(u ; v)$. L'application f est-elle un automorphisme de E_p ?
4. k étant un réel donné, on appelle F_k l'ensemble des éléments φ de E_p tels que $f(\varphi) = k.\varphi$.
Déterminer F_k et discuter suivant les valeurs de k .
5. Démontrer qu'il existe deux constantes réelles λ et μ telles que, pour tout élément φ de E_p ,

$$(f \circ f)(\varphi) + \lambda f(\varphi) + \mu.\varphi$$

soit l'application nulle.